

Modélisation du processus de biodénitrification in situ.

présentée par

Mostafa ABAALI

**Webinaire commun entre le réseau
TREASURE et le réseau REUSE d'INRAE**

le 26/01/2021

Plan

- ▶ Modèles mathématiques de la bio-dénitrification.

Plan

- ▶ Modèles mathématiques de la bio-dénitrification.
- ▶ Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

Plan

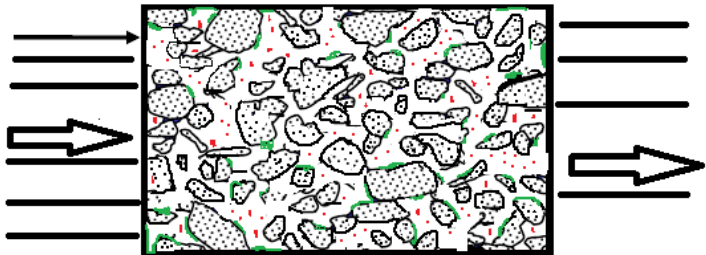
- ▶ Modèles mathématiques de la bio-dénitrification.
- ▶ Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.
- ▶ Approximation, analyse numérique et implémentation du système de bio-dénitrification.

Plan

- ▶ Modèles mathématiques de la bio-dénitrification.
- ▶ Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.
- ▶ Approximation, analyse numérique et implémentation du système de bio-dénitrification.
- ▶ Conclusion et perspectives.

Motivation

Motivation



Modèles de la bio-dénitrification

Modélisation des processus biologique de la dénitrification.

Modèles de la bio-dénitrification

Modélisation des processus biologique de la dénitrification.

$$\frac{db_f}{dt} = \left(\mu_f(\cdot) \quad -k_f \right) b_f \quad .$$

Modèles de la bio-dénitrification

Modélisation des processus biologique de la dénitrification.

$$\frac{db_f}{dt} = \left(\mu_f(\cdot) - k_f - \beta \right) b_f \quad .$$

Modèles de la bio-dénitrification

Modélisation des processus biologique de la dénitrification.

$$\frac{db_f}{dt} = \left(\mu_f(\cdot) G(\bar{b}_f) - k_f - \beta \right) b_f \quad .$$

Modèles de la bio-dénitrification

Modélisation des processus biologique de la dénitrification.

$$\frac{db_f}{dt} = \left(\mu_f(\cdot) G(\bar{b}_f) - k_f - \beta \right) b_f + \alpha (1 - \bar{b}_f) \gamma b_m.$$

Modèles de la bio-dénitrification

Modélisation des processus biologique de la dénitrification.

$$\frac{db_f}{dt} = \left(\mu_f(\cdot) G(\bar{b}_f) - k_f - \beta \right) b_f + \alpha (1 - \bar{b}_f) \gamma b_m.$$

$$G(X) = \frac{1 - X}{a + 1 - X}, \quad \text{Freter (1986) et } \bar{b}_f = \frac{b_f}{w_\infty},$$

Modèles de la bio-dénitrification

Modélisation des processus biologique de la dénitrification.

$$\frac{db_f}{dt} = \left(\mu_f(\cdot) G(\bar{b}_f) - k_f - \beta \right) b_f + \alpha (1 - \bar{b}_f) \gamma b_m.$$

$$G(X) = \frac{1 - X}{a + 1 - X}, \quad \text{Freter (1986) et } \bar{b}_f = \frac{b_f}{w_\infty},$$

$$F_1(b_f, b_m, S, S_N) := \left(\mu_f(\cdot) G(\bar{b}_f) - k_f - \beta \right) b_f + \alpha (1 - \bar{b}_f) \gamma b_m,$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\frac{db_m}{dt} = \left(\mu_m(\cdot) - k_m \right) b_m \quad .$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\frac{db_m}{dt} = \left(\mu_m(\cdot) - k_m - \alpha \right) b_m \quad .$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\frac{db_m}{dt} = \left(\mu_m(\cdot) - k_m - \alpha - d \right) b_m \quad .$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\frac{db_m}{dt} = \left(\mu_m(\cdot) - k_m - \alpha - d \right) b_m + \gamma^{-1} b_f \left(\mu_f(\cdot) (1 - G(\bar{b}_f)) + \beta \right).$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\frac{db_m}{dt} = \left(\mu_m(\cdot) - k_m - \alpha - d \right) b_m + \gamma^{-1} b_f \left(\mu_f(\cdot)(1 - G(\bar{b}_f)) + \beta \right).$$

$$F_2(b_f, b_m, S, S_N) :=$$

$$\left(\mu_m(\cdot) - k_m - \alpha - d \right) b_m + \gamma^{-1} b_f \left(\mu_f(\cdot)(1 - G(\bar{b}_f)) + \beta \right),$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\frac{dS}{dt} = (S^{in} - S)d - \frac{1}{Y_m} b_m \mu_m(\cdot) - \frac{1}{Y_f} \gamma^{-1} b_f \mu_f(\cdot).$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (S^{in} - S)d - \frac{1}{Y_m} b_m \mu_m(\cdot) - \frac{1}{Y_f} \gamma^{-1} b_f \mu_f(\cdot). \\ \frac{dS_N}{dt} &= (S_N^{in} - S_N)d - \frac{R}{Y_m} b_m \mu_m(\cdot) - \frac{R}{Y_f} \gamma^{-1} b_f \mu_f(\cdot).\end{aligned}$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$F_3(b_f, b_m, S, S_N) := (S^{in} - S)d - \frac{1}{Y_m} b_m \mu_m(\cdot) \\ - \frac{1}{Y_f} \gamma^{-1} b_f \mu_f(\cdot),$$

$$F_4(b_f, b_m, S, S_N) := (S_N^{in} - S_N)d - \frac{R}{Y_m} b_m \mu_m(\cdot) \\ - \frac{R}{Y_f} \gamma^{-1} b_f \mu_f(\cdot).$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{db_f}{dt} = F_1(b_f, b_m, S, S_N) \\ \frac{db_m}{dt} = F_2(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{dS}{dt} = F_3(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{dS_N}{dt} = F_4(b_f, b_m, S, S_N). \end{array} \right.$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{db_f}{dt} = F_1(b_f, b_m, S, S_N) \\ \frac{db_m}{dt} = F_2(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{dS}{dt} = F_3(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{dS_N}{dt} = F_4(b_f, b_m, S, S_N). \end{array} \right.$$

$$b_f^0 \geq 0, \quad b_m^0 \geq 0, \quad S^0 \geq 0, \quad S_N^0 \geq 0.$$

Modèles de la bio-dénitrification

Modèles de la bio-dénitrification

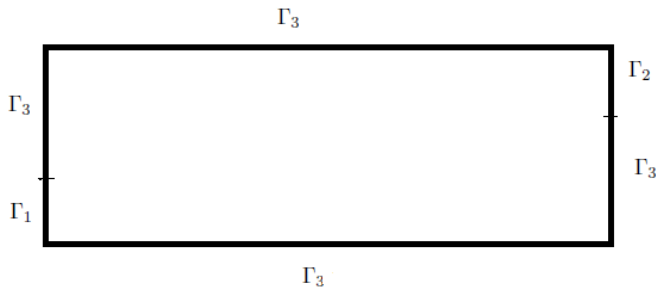


Figure 2 – Domaine Ω et les frontières Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 .

Modèles de la bio-dénitrification

► $b_f \longrightarrow D_1$.

Modèles de la bio-dénitrification

- ▶ $b_f \longrightarrow D_1.$
- ▶ $b_m \longrightarrow -D_2 \nabla b_m + b_m \mathbf{u},$

Modèles de la bio-dénitrification

- ▶ $b_f \longrightarrow D_1.$
- ▶ $b_m \longrightarrow -D_2 \nabla b_m + b_m \mathbf{u},$
- ▶ $S \longrightarrow -D_3 \nabla S + S \mathbf{u}.$

Modèles de la bio-dénitrification

- ▶ $b_f \longrightarrow D_1.$
- ▶ $b_m \longrightarrow -D_2 \nabla b_m + b_m \mathbf{u},$
- ▶ $S \longrightarrow -D_3 \nabla S + S \mathbf{u}.$
- ▶ $S_N \longrightarrow -D_4 \nabla S_N + S_N \mathbf{u}.$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b_f}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1 \nabla b_f) = F_1(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{\partial b_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b_m - \operatorname{div}(D_2 \nabla b_m) = F_2(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S - \operatorname{div}(D_3 \nabla S) = F_3(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{\partial S_N}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S_N - \operatorname{div}(D_4 \nabla S_N) = F_4(b_f, b_m, S, S_N). \end{array} \right.$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b_f}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1 \nabla b_f) = F_1(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{\partial b_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b_m - \operatorname{div}(D_2 \nabla b_m) = F_2(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S - \operatorname{div}(D_3 \nabla S) = F_3(b_f, b_m, S, S_N), \\ \frac{\partial S_N}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S_N - \operatorname{div}(D_4 \nabla S_N) = F_4(b_f, b_m, S, S_N). \end{array} \right.$$

$$b_f(x, 0) = b_f^0; b_m(x, 0) = b_m^0; S(x, 0) = S^0; S_N(x, 0) = S_N^0.$$

Modèles de la bio-dénitrification



$\nabla b_f \cdot \mathbf{n} = 0,$ sur $\Gamma \times]0, T[$, \mathbf{n} est la normale sortante de Γ .

Modèles de la bio-dénitrification



$$\nabla b_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \mathbf{n} \text{ est la normale sortante de } \Gamma.$$



$$-D_3 \nabla S \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S^{in} \quad \text{sur } (\Gamma_1 \times]0, T[).$$

Modèles de la bio-dénitrification



$$\nabla b_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \mathbf{n} \text{ est la normale sortante de } \Gamma.$$



$$-D_3 \nabla S \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S^{in} \quad \text{sur } (\Gamma_1 \times]0, T[).$$



$$-D_3 \nabla S \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_2 \times]0, T[).$$

Modèles de la bio-dénitrification



$$\nabla b_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \mathbf{n} \text{ est la normale sortante de } \Gamma.$$



$$-D_3 \nabla S \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S^{in} \quad \text{sur } (\Gamma_1 \times]0, T[).$$



$$-D_3 \nabla S \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})S = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_2 \times]0, T[).$$



$$\nabla S \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_3 \times]0, T[).$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\begin{cases} -D_2 \nabla b_m \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) b_m = 0 & \text{sur } ((\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times]0, T[), \\ \nabla b_m \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma_3 \times]0, T[). \end{cases}$$

Modèles de la bio-dénitrification

$$\begin{cases} -D_2 \nabla b_m \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) b_m = 0 & \text{sur } ((\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times]0, T[), \\ \nabla b_m \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma_3 \times]0, T[). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -D_4 \nabla S_N \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) S_N = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) S_N^{in} & \text{sur } (\Gamma_1 \times]0, T[), \\ -D_4 \nabla S_N \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) S_N = 0 & \text{sur } (\Gamma_2 \times]0, T[), \\ \nabla S_N \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma_3 \times]0, T[). \end{cases}$$

Modèles de la bio-dénitrification

Couplage avec l'écoulement en milieu poreux.

Modèles de la bio-dénitrification

Couplage avec l'écoulement en milieu poreux.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} = \nabla p, & \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} = f, & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_0, & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ p = 0, & \text{sur } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Modèles de la bio-dénitrification

Couplage avec l'écoulement en milieu poreux.

$$\left\{ \begin{array}{ll} K^{-1} \mathbf{u} = \nabla p, & \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} = f, & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_0, & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ p = 0, & \text{sur } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

$$K(\bar{b}_f) = K_0(1 - \bar{b}_f)^{n_k}, \quad (\text{Charpentier(2008)})$$

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

Théorèmes d'existence et d'unicité.

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

Théorèmes d'existence et d'unicité.

Hypothèses

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

Théorèmes d'existence et d'unicité.

Hypothèses

H1) *Le taux de croissance des bactéries $\mu_i(S, S_N)$, pour $i = f, m$, satisfait*

$$\mu_i \in C^1, \quad \mu_i(S, 0) = \mu_i(0, S_N) = 0.$$

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

Théorèmes d'existence et d'unicité.

Hypothèses

H1) *Le taux de croissance des bactéries $\mu_i(S, S_N)$, pour $i = f, m$, satisfait*

$$\mu_i \in C^1, \quad \mu_i(S, 0) = \mu_i(0, S_N) = 0.$$

H2) *La fonction G satisfait*

$$G \in C^1, \quad 0 < G(0) \leq 1, \quad G'(\cdot) < 0, \quad G(1) = 0.$$

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

Théorèmes d'existence et d'unicité.

Hypothèses

H1) *Le taux de croissance des bactéries $\mu_i(S, S_N)$, pour $i = f, m$, satisfait*

$$\mu_i \in C^1, \quad \mu_i(S, 0) = \mu_i(0, S_N) = 0.$$

H2) *La fonction G satisfait*

$$G \in C^1, \quad 0 < G(0) \leq 1, \quad G'(\cdot) < 0, \quad G(1) = 0.$$

H3) *Le domaine Ω est un domaine borné convexe de frontière polygonale par morceaux.*

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) := (b_f, b_m, S, S_N); \mathbf{C}^0 = (b_f^0, b_m^0, S^0, S_N^0),$$

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) := (b_f, b_m, S, S_N); \mathbf{C}^0 = (b_f^0, b_m^0, S^0, S_N^0),$$

Les flux globaux sont définis par

$$\begin{aligned} J_1(c_1) &:= D_1 \nabla c_1, \\ J_i(c_i) &:= D_i \nabla c_i - \mathbf{u} c_i, \quad \text{pour } i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) := (b_f, b_m, S, S_N); \mathbf{C}^0 = (b_f^0, b_m^0, S^0, S_N^0),$$

Les flux globaux sont définis par

$$\begin{aligned} J_1(c_1) &:= D_1 \nabla c_1, \\ J_i(c_i) &:= D_i \nabla c_i - \mathbf{u} c_i, \quad \text{pour } i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

L'opérateur frontière sera défini par $\mathbf{B} := (B_1, B_2, B_3, B_4)$ où

$$B_i(c_i) = \begin{cases} J_i(c_i) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ pour } i = 2, 3, 4 \\ \nabla c_i \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_3(i = 2, 3, 4) \text{ et sur } \Gamma(i = 1). \end{cases}$$

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) := (b_f, b_m, S, S_N); \mathbf{C}^0 = (b_f^0, b_m^0, S^0, S_N^0),$$

Les flux globaux sont définis par

$$\begin{aligned} J_1(c_1) &:= D_1 \nabla c_1, \\ J_i(c_i) &:= D_i \nabla c_i - \mathbf{u} c_i, \quad \text{pour } i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

L'opérateur frontière sera défini par $\mathbf{B} := (B_1, B_2, B_3, B_4)$ où

$$B_i(c_i) = \begin{cases} J_i(c_i) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ pour } i = 2, 3, 4 \\ \nabla c_i \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_3 (i = 2, 3, 4) \text{ et sur } \Gamma (i = 1). \end{cases}$$

$\mathbf{g} := (0, 0, g_3, g_4)$ où

$$g_3 = \begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c_3^{in} & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \end{cases}; g_4 = \begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c_4^{in} & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \end{cases}$$

Analyse mathématique du modèle fixe-mobile.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial c_i}{\partial t} - \operatorname{div}(J_i(c_i)) = F_i(\mathbf{C}) & \text{dans } Q_T, \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \\ \mathbf{B}(\mathbf{C}) = \mathbf{g} & \text{sur } \Sigma_T \\ \mathbf{C}(0, \cdot) = \mathbf{C}^0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

Théorème 1

(Abaali-Harmand-Mghazli(2020))

Le problème (1) admet une solution globale faible positive unique, $\forall T > 0$, dans le sens suivant

Théorème 1

(Abaali-Harmand-Mghazli(2020))

Le problème (1) admet une solution globale faible positive unique, $\forall T > 0$, dans le sens suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \in (C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))^4, \\ \forall \Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \in (C^\infty(\overline{Q_T}))^4 \text{ tel que } \Psi(T) = 0, \\ \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \\ - \int_{Q_T} c_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \int_{Q_T} J_i(c_i) \cdot \nabla \psi_i = \int_{Q_T} F_i(\mathbf{C}) \psi_i \\ + \int_{\Omega} c_i^0 \psi_i(0) + \int_{\Sigma_T} g_i \psi_i. \end{array} \right.$$

Théorème 1

(Abaali-Harmand-Mghazli(2020))

Le problème (1) admet une solution globale faible positive unique, $\forall T > 0$, dans le sens suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \in (C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))^4, \\ \forall \Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \in (C^\infty(\overline{Q_T}))^4 \text{ tel que } \Psi(T) = 0, \\ \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \\ - \int_{Q_T} c_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \int_{Q_T} J_i(c_i) \cdot \nabla \psi_i = \int_{Q_T} F_i(\mathbf{C}) \psi_i \\ + \int_{\Omega} c_i^0 \psi_i(0) + \int_{\Sigma_T} g_i \psi_i. \end{array} \right.$$

$$\|\mathbf{C}\|_{(L^\infty(Q_T))^4} + \|\mathbf{C}\|_{(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^4} + \left\| \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right\|_{(L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)))^4} \leq M$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Une formulation faible du problème (1) consiste à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{C} \in (L^2(]0, T[; L^2(\Omega))) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \\ \text{tel que p.p tout } t \in]0, T[\\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c_i(t) \psi_i + \int_{\Omega} J_i(c_i(t)) \cdot \nabla \psi_i = \int_{\Omega} F_i(\mathbf{C}(t)) \psi_i \\ + \int_{\Gamma} g_i \psi_i, \quad \forall \psi \in (H^1(\Omega))^4, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \mathbf{C}(0) = \mathbf{C}_0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Par le changement de variable $\phi_i = \exp(-\gamma t)c_i$ où $\gamma = \inf_{1 \leq i \leq 4} D_i$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Par le changement de variable $\phi_i = \exp(-\gamma t)c_i$ où $\gamma = \inf_{1 \leq i \leq 4} D_i$

$$(\mathbf{P}) : \begin{cases} \text{Trouver } \Phi(t) \in (H^1(\Omega))^4 \text{ tel que pour } i = 1, \dots, 4 \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi_i(t) \psi_i + \tilde{a}_i(\phi_i(t), \psi_i) = \int_{\Omega} G_i(\Phi) \psi_i + \int_{\Gamma} \tilde{g}_i \psi_i, \\ \forall \psi_i \in H^1(\Omega), \\ \Phi(0) = \mathbf{C}_0. \end{cases}$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Discrétisation et estimation *a priori* de l'erreur.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

**Discrétisation et estimation *a priori* de l'erreur.
Problème semi-discret.**

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Discrétisation et estimation *a priori* de l'erreur.
Problème semi-discret.

\mathcal{T}_h une triangulation régulière du domaine Ω ,

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Discrétisation et estimation *a priori* de l'erreur.

Problème semi-discret.

\mathcal{T}_h une triangulation régulière du domaine Ω ,

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K),$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Discrétisation et estimation *a priori* de l'erreur.

Problème semi-discret.

\mathcal{T}_h une triangulation régulière du domaine Ω ,

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K),$$

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h) = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Discrétisation et estimation *a priori* de l'erreur.

Problème semi-discret.

\mathcal{T}_h une triangulation régulière du domaine Ω ,

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K),$$

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h) = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$\mathbb{V}_h = (\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h))^4.$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Le problème semi-discret associé au problème auxiliaire **(P)** donné, pour p.p. $t \in]0, T]$, par

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Le problème semi-discret associé au problème auxiliaire **(P)** donné, pour p.p. $t \in]0, T]$, par

$$(\mathbf{P}_h) : \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \Phi_h(t) \in \mathbb{V}_h \text{ tel que pour } i = 1, \dots, 4 \\ \forall \psi_{ih} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi_{ih}(t) \psi_{ih} + \tilde{a}(\phi_{ih}, \psi_{ih}) = \int_{\Omega} G_i(\Phi_h(t)) \psi_{ih} \\ + \int_{\Gamma} \tilde{g}_i \psi_{ih}, \\ \Phi_h(0) = \Pi_h \Phi_0. \end{array} \right.$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Le problème semi-discret associé au problème auxiliaire **(P)** donné, pour p.p. $t \in]0, T]$, par

$$(\mathbf{P}_h) : \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \Phi_h(t) \in \mathbb{V}_h \text{ tel que pour } i = 1, \dots, 4 \\ \forall \psi_{ih} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi_{ih}(t) \psi_{ih} + \tilde{a}(\phi_{ih}, \psi_{ih}) = \int_{\Omega} G_i(\Phi_h(t)) \psi_{ih} \\ + \int_{\Gamma} \tilde{g}_i \psi_{ih}, \\ \Phi_h(0) = \Pi_h \Phi_0. \end{array} \right.$$

où $\Pi_h : (H^1(\Omega))^4 \rightarrow \mathbb{V}_h$ est un opérateur de projection.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Théorème 2

(Abaali-Harmand-Mghazli(2020))

Soient Φ et Φ_h les solutions respectives de (\mathbf{P}) et (\mathbf{P}_h) . On suppose que $\|\mathbf{u}\|_\infty < 2\gamma$, et soit $\bar{t} \in [0, T]$. Alors

$$\|\Phi(t) - \Phi_h(t)\|_{0,\Omega} \leq L(\Phi)h^2, \quad \text{pour } t \in \bar{J} = [0, \bar{t}],$$

où $L(\Phi)$ est une constante positive, qui dépend de t et la solution Φ et indépendante de h .

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Problème totalement discrétisé.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Problème totalement discrétisé.

l'intervalle de temps $[0, T]$ sera discrétisé comme suit

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Problème totalement discrétisé.

l'intervalle de temps $[0, T]$ sera discrétisé comme suit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Problème totalement discrétisé.

l'intervalle de temps $[0, T]$ sera discrétisé comme suit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

$$\tau_n := t_n - t_{n-1},$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Problème totalement discrétisé.

l'intervalle de temps $[0, T]$ sera discrétisé comme suit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

$$\tau_n := t_n - t_{n-1}, \tau := \max_{1 \leq n \leq N} \tau_n.$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Problème totalement discrétisé.

l'intervalle de temps $[0, T]$ sera discrétisé comme suit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

$$\tau_n := t_n - t_{n-1}, \quad \tau := \max_{1 \leq n \leq N} \tau_n.$$

$$(\mathbf{P}_h^n) : \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \Phi_h^n \in \mathbb{V}_h \text{ tel que pour } i = 1, \dots, 4 \\ \int_{\Omega} \frac{\phi_{ih}^n - \phi_{ih}^{n-1}}{\tau_n} \psi_{ih} + \tilde{a}(\phi_{ih}^n, \psi_{ih}) = \int_{\Omega} G_i(\Phi_h^{n-1}) \psi_{ih} \\ + \int_{\Gamma} \tilde{g}_i \psi_{ih}, \quad \forall \Psi \in \mathbb{V}_h \\ \Phi_h^0 = \Pi_h(\Phi_0). \end{array} \right.$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Théorème 3

(Abaali-Harmand-Mghazli(2020))

Soient Φ_h^n et Φ les solutions respectives de (\mathbf{P}_h^n) et (\mathbf{P}) . Alors il existe une constante M dépendante de Φ mais indépendante de h et τ telle que

$$\|\Phi_h^n - \Phi(t_n)\|_{0,\Omega} \leq M(\Phi)(h^2 + \tau). \quad (3)$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Tests numériques.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Tests numériques.

Longueur $L = 300$ cm et de section carrée de 10 cm de côté,

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Tests numériques.

Longueur $L = 300$ cm et de section carrée de 10 cm de côté,

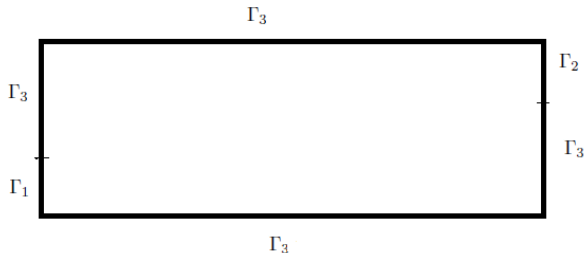


Figure 3 – Domaine Ω et les frontières Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 .

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Tests numériques.

Longueur $L = 300$ cm et de section carrée de 10 cm de côté,

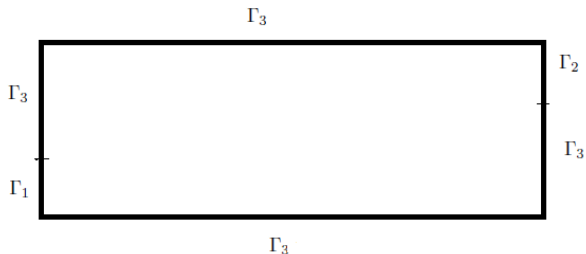


Figure 3 – Domaine Ω et les frontières Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 .

$$\Gamma_1 = \{0\} \times [0, 0.3], \Gamma_2 = \{3\} \times [0.7, 1] \Gamma_3 = \Gamma / \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

P	Valeurs	P	Valeurs	CI	Valeurs
D_3	$0.3 \text{ cm}^2/h$	μ_{max}^f	0.7 h^{-1}	b_f^0	10 g/cm^2
D_4	$0.4 \text{ cm}^2/h$	Y_m	0.5	b_m^0	10 g/ml
D_2	$0.4 \text{ cm}^2/h$	Y_f	0.5	S^{in}	104 mg/l
D_1	$0.2 \text{ cm}^2/h$	β	0.2 h^{-1}	S_N^{in}	100 mg/l
α	0.02 h^{-1}	T	100 days	K_0	0.865 cm/h
w_∞	50 g/cm^2	R	1.2	S^0	104 mg/l
n^k	3	K_S^f	54 mg/l	S_N^0	100 mg/l
k_m	0.005 h^{-1}	K_S^m	54 mg carbon/l	—	—
k_b	0.005 h^{-1}	K_{SN}^m	$50 \text{ mgNO}_3^- / \text{l}$	—	—
μ_{max}^m	0.7 h^{-1}	K_{SN}^f	50 mg carbon/l	—	—

Table 1 – P =paramètre, CI =Conditions initiales : Charpentier (2008) et Chevreton (1996)

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Comparaison du modèle Fixe-Mobile avec le cas d'une seule catégorie de bactéries.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Comparaison du modèle Fixe-Mobile avec le cas d'une seule catégorie de bactéries.

Scenario 1 : Où nous suivons l'évolution des bactéries fixes et les bactérie mobiles simultanément.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Comparaison du modèle Fixe-Mobile avec le cas d'une seule catégorie de bactéries.

Scenario 1 : Où nous suivons l'évolution des bactéries fixes et les bactérie mobiles simultanément.

Scenario 2 : Où nous prenons $c_2 = b_m = 0$.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Comparaison du modèle Fixe-Mobile avec le cas d'une seule catégorie de bactéries.

Scenario 1 : Où nous suivons l'évolution des bactéries fixes et les bactérie mobiles simultanément.

Scenario 2 : Où nous prenons $c_2 = b_m = 0$.

Scenario 3 : Où nous prenons $c_1 = b_f = 0$.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Comparaison du modèle Fixe-Mobile avec le cas d'une seule catégorie de bactéries.

Scenario 1 : Où nous suivons l'évolution des bactéries fixes et les bactérie mobiles simultanément.

Scenario 2 : Où nous prenons $c_2 = b_m = 0$.

Scenario 3 : Où nous prenons $c_1 = b_f = 0$.

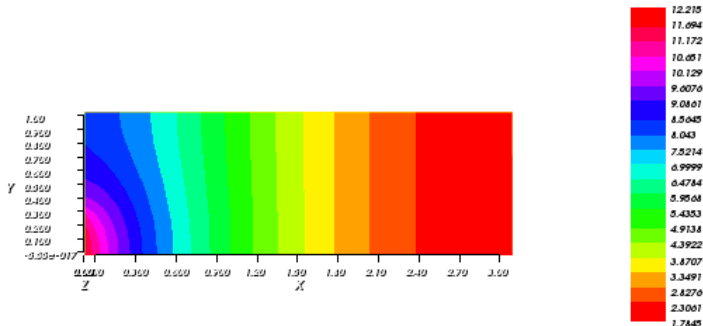
$$\mu_i(S) = \mu_{max}^i \frac{S}{S + K_S^i} \quad \text{pour } i = m, f.$$

itération	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3
2	5.21291	2.83116	2.13219
8	15.0854	11.4535	3.04686
18	29.4348	25.0676	3.41829
22	34.8454	30.2186	3.55491
32	47.591	42.3789	3.86101
38	54.7282	49.203	4.01985
48	65.8292	59.8361	4.24586
52	70.0061	63.8426	4.32376
62	79.8316	73.2786	4.42824
68	85.3265	78.5623	4.57235
78	95.4827	86.7802	4.68296
84	95.3553	91.3781	4.73499
88	95.2701	94.3118	4.76418
94	95.1418	95.6565	4.80029
98	95.0559	95.5722	4.81952

Table 2 – Pourcentage des nitrates éliminés pour les trois scenario s ($\mathbf{u} = (0.05m/h, 0)$).

itération	$\mathbf{u} = (0.02m/h, 0)$	$\mathbf{u} = (0.05m/h, 0)$
2	5.36271	5.21291
8	15.4356	15.0854
18	30.0006	29.4348
22	35.4832	34.8454
32	48.3903	47.591
38	55.6154	54.7282
48	66.8526	65.8292
52	71.0814	70.0061
58	77.1552	70.7541
62	81.0319	79.8316
68	86.5996	85.3265
84	98.4937	95.3553
88	98.4561	95.2701
94	98.3996	95.1418
98	98.3619	95.0559

Table 3 – Pourcentage des nitrates éliminés pour le Scenario 1 avec ($\mathbf{u} = (0.02m/h, 0)$) et ($\mathbf{u} = (0.05m/h, 0)$).



concentration des nitrates

Figure 4 – Isovaleurs de la concentration des nitrates le 98^{eme} jour (Fixe-Mobile)

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Cas d'une vitesse de l'écoulement variable.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Cas d'une vitesse de l'écoulement variable.

- ▶ K_0 (conductivité initiale)

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Cas d'une vitesse de l'écoulement variable.

► K_0 (conductivité initiale)

►

$$\begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} p = \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} p_D, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q + \int_{\Omega} f q = 0, & \forall q \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

où $\mathbf{V} := \{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega) / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \}$,

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Cas d'une vitesse de l'écoulement variable.

- ▶ K_0 (conductivité initiale)



$$\begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} p = \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} p_D, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q + \int_{\Omega} f q = 0, & \forall q \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

où $\mathbf{V} := \{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega) / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \}$,

- ▶ $K(\bar{b}_f) = K_0(1 - \bar{b}_f)^{n_k}$.

itération	Vitesse constante	vitesse variable
2	5.21291	5.52049
8	15.0854	16.9803
18	29.4348	36.9765
22	34.8454	45.8069
32	47.591	70.1195
38	54.7282	86.368
42	59.2846	97.9785
48	65.8292	98.988
52	70.0061	98.988
62	79.8316	98.988
68	85.3265	98.988
78	95.4827	98.988
88	95.2701	98.988
94	95.1418	98.988
98	95.0559	98.988

Table 4 – Pourcentage des nitrates éliminés pour Fixe-Mobil (vitesse constante/vitesse variable).

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Les fonctions de croissances des bactéries.

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Les fonctions de croissances des bactéries.

► $\mu_i(S) = \mu_{max}^i \frac{S}{S+K_S^i}$ pour $i = m, f.$ (*Model1*)

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Les fonctions de croissances des bactéries.

- ▶ $\mu_i(S) = \mu_{max}^i \frac{S}{S + K_S^i}$ pour $i = m, f.$ (Model1)
- ▶ $\mu(S, S_N) = \left(\mu_{max}^1 \frac{S}{S + K_S} \right) \left(\mu_{max}^2 \frac{S_N}{S_N + K_{S_N}} \right).$ (Model2)

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Les fonctions de croissances des bactéries.

- ▶ $\mu_i(S) = \mu_{max}^i \frac{S}{S + K_S^i}$ pour $i = m, f.$ (Model1)
- ▶ $\mu(S, S_N) = \left(\mu_{max}^1 \frac{S}{S + K_S} \right) \left(\mu_{max}^2 \frac{S_N}{S_N + K_{S_N}} \right).$ (Model2)
- ▶ $\mu(S, S_N) = \min \left(\mu_{max}^1 \frac{S}{S + K_S}; \mu_{max}^2 \frac{S_N}{S_N + K_{S_N}} \right).$ (Model3)

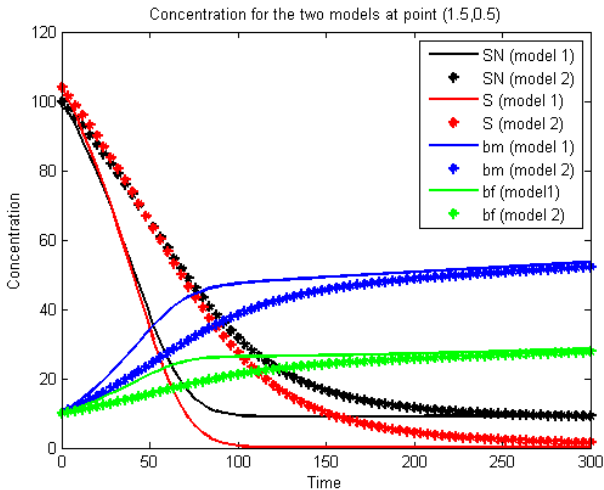


Figure 5 – Concentrations avec (Model 1) et (Model 2), au point (1.5,0.5)

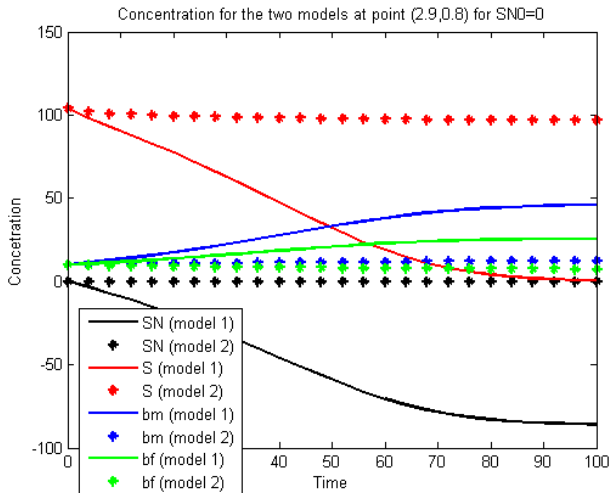


Figure 6 – Concentrations avec (Model 1) et (Model 2) au point (2.9,0.8) pour $S^{in} = 0$

Approximation, analyse numérique et implémentation.

Dans la suite on compare les résultats obtenus avec les deux premières formes avec ceux obtenus avec la forme du minimum (Model 3).

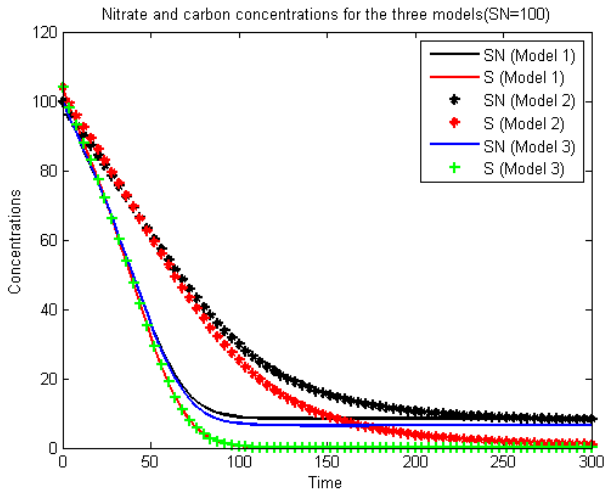


Figure 7 – Concentrations de carbone et de nitrates avec (Model 1), (Model 2) et (Model 3) au point (2,9,0,8) pour $S^{in} = 100$

Conclusion et perspectives.

Conclusion et perspectives.

- ▶ Le modèle fixe mobile spatialisé est le plus réaliste.

Conclusion et perspectives.

- ▶ Le modèle fixe mobile spatialisé est le plus réaliste.
- ▶ Les résultats obtenus avec la fonction de croissance du minimum sont meilleurs que ceux obtenus avec les deux autres formes.

Conclusion et perspectives.

- ▶ Le modèle fixe mobile spatialisé est le plus réaliste.
- ▶ Les résultats obtenus avec la fonction de croissance du minimum sont meilleurs que ceux obtenus avec les deux autres formes.
- ▶ La dépendance de la vitesse de l'écoulement de la concentration des bactéries fixes donne des résultats plus proches de ceux expérimentaux.

Conclusion et perspectives.

- ▶ Le modèle fixe mobile spatialisé est le plus réaliste.
- ▶ Les résultats obtenus avec la fonction de croissance du minimum sont meilleurs que ceux obtenus avec les deux autres formes.
- ▶ La dépendance de la vitesse de l'écoulement de la concentration des bactéries fixes donne des résultats plus proches de ceux expérimentaux.
- ▶ L'étude des états d'équilibre du système obtenu ainsi que leurs stabilité.

MERCI