

# Modélisation mathématique et approximation numérique d'un problème d'écoulement dans une décharge de déchets ménagers

Z. Belhachmi<sup>1</sup>   Z. Mghazli<sup>2</sup>   S. Ouchtout<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>IRIMAS - UNIVERSITE DE HAUTE ALSACE, MULHOUSE

<sup>2,3</sup>LIRNE-EIM - UNIVERSITE IBN TOFAIL, KENITRA



26 Janvier 2021



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Analyse et approximation numérique
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion / Perspective

# Introduction

## La digestion anaérobie

- un processus biologique naturel de décomposition de la matière organique par des micro-organismes (bactéries)
- des conditions anaérobies
- une succession de réactions complexes à la fois en parallèle et en série.
- la matière organique se transforme en biogaz

# Introduction

## Objectif

- ⇒ La teneur en eau est un facteur important pour la production du biogaz
- ⇒ L'utilisation des équations d'écoulement de lixiviat
- ⇒ Construire des prévision et prendre de bonne décision pour améliorer la situation de production du biogaz

# Modèle de digestion anaérobie

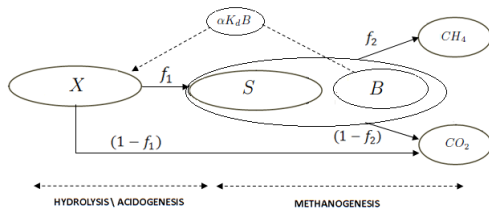


Figure – 1 – Schéma utilisé pour modéliser la dégradation anaérobie de la matière organique

## Modèle de digestion anaérobie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d[CO_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d[CH_4]}{dt} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{array} \right. \quad (1b)$$

# Modèle de digestion anaérobie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d[CO_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d[CH_4]}{dt} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{array} \right. \quad (1b)$$

## Modèle de digestion anaérobie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d[CO_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d[CH_4]}{dt} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{array} \right. \quad (1b)$$



## Modèle de digestion anaérobie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B \quad = F_1(U) \\ \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \quad = F_2(U) \\ \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B \quad = F_3(U) \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d[CO_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \quad = F_4(U) \\ \frac{d[CH_4]}{dt} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \quad = F_5(U) \end{array} \right. \quad (2b)$$

$$U = (u_1, u_2, u_3)^t = (X, B, S)^t, \quad G = (u_4, u_5)^t = ([CO_2], [CH_4])^t$$

$$F^1(U) = (F_1(U), F_2(U), F_3(U))^T, \quad F^2(U) = (F_4(U), F_5(U))^T.$$

## Taux de croissance spécifique

$\mu(S)$  est le taux de croissance spécifique :

- La loi de Monod

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S} \quad \{Rouez, M.(2008)[5]\}$$

- La loi de Haldane

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}}$$

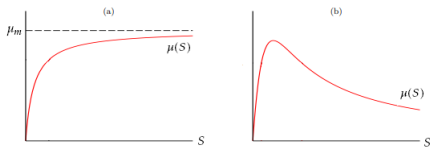


Figure – 2 – La loi de Monod dans (a) et la loi de Haldane dans (b)

## Taux de croissance spécifique

$\mu(S)$  est le taux de croissance spécifique :

- La loi de Monod

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S} \quad \{Rouez, M.(2008)[5]\}$$

- La loi de Haldane

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}}$$

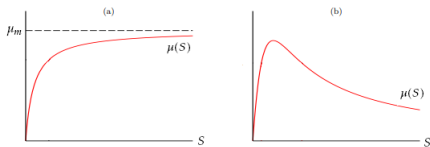


Figure – 2 – La loi de Monod dans (a) et la loi de Haldane dans (b)

# Comportement asymptotique

Ouchtout S., Mghazli, Z., Harmand, J., Rapaport, A., Belhachmi, Z. (2020) [4]

Considérons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des valeurs de  $S$  défini par

$$\mathcal{E} := \{s \in \mathbb{R}_+; \mu(s) \leq K_d\}.$$

- Cas de la loi de Monod :  
il n'y a qu'un seul bassin  $\bar{\mathcal{B}} = \{0\} \times I_M \times \{0\}$  conduisant à des équilibres avec  $S^*$  dans  $I_M = [0, \lambda] = \mathcal{E}$ .
- Cas de la loi de Haldane :  
il y a deux bassins  $\mathcal{B}^- = \{0\} \times I_{H1} \times \{0\}$ ,  $\mathcal{B}^+ = \{0\} \times I_{H2} \times \{0\}$  conduisant à des équilibres avec  $S^*$  dans  $I_{H1} = [0, \lambda^-]$  ou dans  $I_{H2} = [\lambda^+, +\infty)$  ( $I_{H1} \cup I_{H2} = \mathcal{E}$ ).

# Comportement asymptotique

## Proposition

*Pour tout vecteur non négatif  $(X_0, S_0, B_0)$ , les solutions de (2a) – (2b) vérifient*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [CO_2](t) = [CO_2](0) + a(X_0 + \alpha B_0) + b(S_0 - S^*)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [CH_4](t) = [CH_4](0) + c(X_0 + \alpha B_0) + d(S_0 - S^*)$$

# Comportement asymptotique

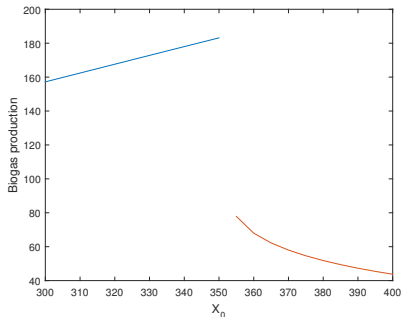


Figure – Valeur maximale de  $[CH_4]$  en fonction de  $X_0$ .

# Modèle de digestion anaérobie

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B + \text{div}(D_X \nabla X) \\
 \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B + \text{div}(D_S \nabla S) \\
 \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B + \text{div}(D_B \nabla B) \\
 \frac{d[CO_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B + \text{div}(D_{[CO_2]} \nabla [CO_2]) \\
 \frac{d[CH_4]}{dt} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B + \text{div}(D_{[CH_4]} \nabla [CH_4])
 \end{array} \right.$$

## Modèle de digestion anaérobie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B + \text{div}(D_X \nabla X) \\ \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B + \text{div}(D_S \nabla S) \\ \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B + \text{div}(D_B \nabla B) \\ \frac{d[CO_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d[CH_4]}{dt} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{array} \right.$$



Système de Réaction-Diffusion (NL) :

$$(S1) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(\overline{\overline{D}} \nabla U) = F^1(U) & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \frac{dG}{dt} = F^2(U) & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[ \\ U(0, \cdot) = U^0(\cdot) \text{ et } G(0, \cdot) = G^0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Remarque

$$\frac{dG}{dt} = F^2(U) = \left[ \begin{array}{c} (1 - f_1)K_h u_1 + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \left( \frac{du_2}{dt} + K_d u_2 \right) \\ f_2 \frac{1 - Y}{Y} \left( \frac{du_2}{dt} + K_d u_2 \right) \end{array} \right].$$

Le système d'écoulement du lixiviat :

$$(S2) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \theta(p) + \operatorname{div} \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ k(p) \mathbf{u} = -\nabla p + e_z & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ p = p_D & \text{sur } \Gamma_D \times ]0, T[ \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times ]0, T[ \\ p(x, 0) = p_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

- $\theta(p)$  et  $k(p)$  sont des fonctions empiriques (Brooks-Corey (1964), Campbel (1974) et Van Genuchten (1980))

## Terme source

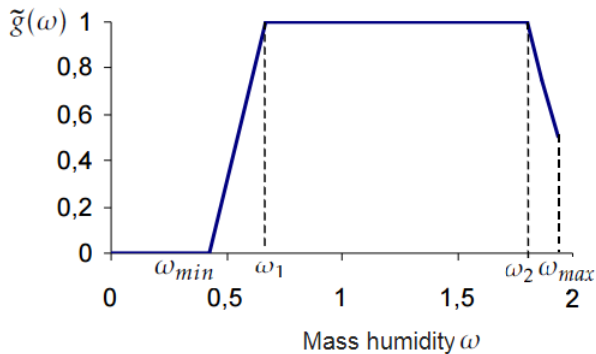


Figure – 3 – La fonction empirique  $\tilde{g}(\omega)$  "Aran, C. (2001)[1]"

## Terme source

Le terme source de l'équation de continuité de lixiviat :

$$\alpha_l = -\gamma\alpha_b = -\gamma\tilde{g}(\omega)C_{Tb}\lambda_{cin},$$

$\lambda_{cin}$  est le taux de génération du biogaz

$$\lambda_{cin} = \frac{dC_{biogaz}}{dt} = \frac{d([CH_4] + [CO_2])}{dt},$$

## Modèle final

$$(S1) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div} (\bar{D} \cdot \nabla U) = F^1(U), & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ \frac{dG}{dt} = F^2(U), & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[, \\ U(0, \cdot) = U^0(\cdot), & \text{dans } \Omega \\ G(0, \cdot) = G^0(\cdot), & \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

et

$$(S2) \left\{ \begin{array}{ll} c(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = f, & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ k(p) \mathbf{u} = -\nabla p + e_z, & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ p = p_D, & \text{sur } \Gamma_D \times ]0, T[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_N \times ]0, T[, \\ p(x, 0) = p_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

## Modèle final

$$(S1) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div} (\overline{D} \cdot \nabla U) = F^1(U), & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ \frac{dG}{dt} = F^2(U), & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[, \\ U(0, \cdot) = U^0(\cdot), & \text{dans } \Omega \\ G(0, \cdot) = G^0(\cdot), & \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

et

$$(S2) \left\{ \begin{array}{ll} c(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = f, & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ k(p) \mathbf{u} = -\nabla p + e_z, & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ p = p_D, & \text{sur } \Gamma_D \times ]0, T[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_N \times ]0, T[, \\ p(x, 0) = p_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

## Proposition 1

Pour tout  $U^0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+^3)$ , le système (S1) a une solution faible unique, et non négative,  $U = (u_1, u_2, u_3)^T$  dans le sens suivant :  $\forall T > 0$

$\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $u_i \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ;  
 $\forall \psi \in C^\infty(Q_T)$  tel que  $\psi(T) = 0$

$$-\int_{\Omega} u_i^0 \psi(0) dx - \int_{Q_T} u_i \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \int_{Q_T} D_i \nabla u_i \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{Q_T} F_i(U(t, x)) \cdot \psi dx dt.$$

De plus, pour tout  $T > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que

$$\|U\|_{L^\infty(Q_T)^3} + \|U\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^3)} + \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)} \leq C.$$

## Analyse de problème

## Proposition 2

Pour tout  $p^0 \in L^2(\Omega)$  et  $p_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ , il existe une unique solution faible  $p \in p_D + L^2(0, T; H_{\Gamma_D}^1(\Omega))$  dans le sens suivant :  $p(x, 0) = p^0$  et pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_D}^1(\Omega))$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \theta(p)}{\partial t} \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k_i k_r(p)}{\mu \ell} \rho g (\nabla p - e_z) \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \, dx \, dt.$$



# Discrétisation complète du système (S1)

$\forall n \geq 1$ , trouver

$$U_h^{n+1} \in Z_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\bar{\Omega}))^3 ; \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \mathbf{v}_h|_K \in (P_1(K))^3 \right\} \in (H^1(\Omega))^3$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{3}{2\tau_n} I_3 - J_{F^1}(U_h^n) \right] U_h^{n+1} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \bar{\bar{D}} \nabla U_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} dx =$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{4U^n - U^{n-1}}{2\tau_n} + F^1(U^n) - J_{F^1}(U^n) U^n \right] \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z_h.$$

Trouver  $U_h^1 \in Z_h$  tel que

$$\int_{\Omega} [\tau_0^{-1} I_3 - J_{F^1}(U^0)] U_h^1 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \bar{\bar{D}} \nabla U_h^1 \cdot \nabla \mathbf{v} dx =$$

$$\int_{\Omega} [\tau_0^{-1} U^0 + F^1(U^0) - J_{F^1}(U^0) U^0] \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z_h,$$

# Discrétisation complète du système (S1)

Puis, en utilisant la Remarque 14, on cherche  $G_h^{m+1} = (u_{4h}^{m+1}, u_{5h}^{m+1})^T$ , pour  $0 \leq m \leq n$ , tel que

$$\frac{u_{4h}^{m+1} - u_{4h}^m}{\tau_m} = (1 - f_1)K_h u_{1h}^{n+1} + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \left( \frac{u_{2h}^{m+1} - u_{2h}^m}{\tau_m} + K_d u_{2h}^{m+1} \right),$$

$$\frac{u_{5h}^{m+1} - u_{5h}^m}{\tau_m} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \left( \frac{u_{2h}^{m+1} - u_{2h}^m}{\tau_m} + K_d u_{2h}^{m+1} \right).$$

## Semi-discrétisation et FV du système (S2)

$$(S2_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathbf{V} \times W \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}^{n+1}, \psi) + b(\psi, p^{n+1}) = g_1(\psi), \quad \forall \psi \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}^{n+1}, \varphi) - d(p^{n+1}, \varphi) = g_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in W, \end{array} \right.$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2, \text{ div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \},$$

$$\mathbf{V} = H_{0,N}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \},$$

$$W = L^2(\Omega),$$

# Semi-discrétisation et FV du système (S2)

où  $a: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b: \mathbf{V} \times W \rightarrow \mathbb{R}$  et  $d: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  sont des formes bilinéaires définies par

$$a(\mathbf{u}, \psi) = \int_{\Omega} k(p^n) \mathbf{u} \cdot \psi \, dx \quad , \quad (\mathbf{u}, \psi) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

$$b(\mathbf{u}, \varphi) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \quad , \quad (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V} \times W$$

$$d(p, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} p \varphi \, dx \quad , \quad (p, \varphi) \in W \times W$$

# Semi-discrétisation et FV du système (S2)

$g_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g_2 : W \rightarrow \mathbb{R}$  sont des formes linéaires définies par

$$g_1(\psi) = - \int_{\Gamma_D} p_D \psi \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \mathbf{e}_z \cdot \psi dx \quad , \quad \psi \in \mathbf{V}$$

$$g_2(\varphi) = - \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} p^n \varphi dx - \int_{\Omega} f^{n+1} \varphi dx \quad , \quad \varphi \in W.$$

## Proposition 3

Pour tout  $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$  et  $f \in L^2(\Omega)$ , le système  $(S2_c)$  admet une solution unique et on a les estimations

$$\begin{aligned}\|u^n\|_V &\leq C_1 \|g_1\|_{V'} + C_2 \|g_2^n\|_{W'}, \\ \|p^n\|_W &\leq C_2 \|g_1\|_{V'} + C_3 \|g_2^n\|_{W'},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{(1 + C_\Omega^2)^{-1} + 4\tau_{n-1}^{-1} C(p^{n-1}) C_k}{c_k (1 + C_\Omega^2)^{-1}}, & C_2 &= \frac{2C_k^{1/2}}{c_k^{1/2} (1 + C_\Omega^2)^{-1/2}}, \\ C_3 &= \frac{4C_k}{\tau_{n-1}^{-1} C(p^{n-1}) + 2(1 + C_\Omega^2)^{-1}},\end{aligned}$$

où  $C_\Omega$  est la constante de Poincaré.

# Espace discrets

L'espace global Raviart-Thomas le plus bas degré :

$$RT_0(\mathcal{T}_h) := \{\mathbf{v}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{v}_h|_K \in RT_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Nous introduisons les espaces discrets suivants : "pour (S2)"

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in RT_0(\mathcal{T}_h) \mid \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}.$$

et

$$W_h := \{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_K \in P_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

# Discrétisation complète du système (S2)

L'approximation par la méthode des éléments finis mixtes est la suivante :

$$(S2_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \mathbf{V}_h \times W_h \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \psi_h) + b(\psi_h, p_h^{n+1}) = g_1(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h^{n+1}, \varphi_h) - d(p_h^{n+1}, \varphi_h) = g_2(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in W_h. \end{array} \right.$$



# Discrétisation complète du système (S2)

## Proposition 3

*Le problème  $(S2_h)$  admet une solution unique.*

## Proposition 4

*Pour tout  $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$  et  $p \in H^1(\Omega)$ , il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  qui satisfait l'estimation suivante*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|p - p_h\|_W \leq Ch(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega})$$

# Résultats numériques

## Résultats numériques

$\Omega = ]0, L[ \times ]0, L[ \times ]0, L[$ ,  $L = 10$ .  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  et  
 $\Gamma_D = \{(x, y) \in ]0, L[ \times ]0, L[ \text{ and } z = 0\}$ . ( $z$  est l'axe vertical dirigé vers le bas)

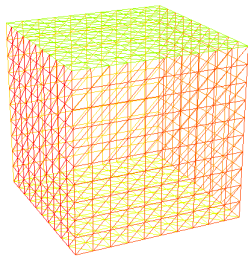


Figure – 4 – Le maillage (600 tétraèdres, 1331 sommets et 1200 arêtes (faces)).

# Résultats numériques

Table – 1 – Les paramètres et les conditions initiales et aux limites du problème

$K_H(d^{-1})$	$\mu_m(d^{-1})$	$f_1$	$f_2$	$K_S(mgC/L)$	$K_d(d^{-1})$	$Y$
0.176	0.3	0.7	0.76	160	0.04	0.05
$M_b(g/mol)$	$M_{H_2O}(g/mol)$	$A_m$	$C_{Tb}(m^3/Kg)$	$K_I(mgC/L)$	$\alpha$	
30	18.01	0.8	0.178	10	0.9	
$\theta_r$	$\theta_s$	$k_i(m.s^{-1})$	$\rho(Kg.m^{-3})$	$p_a(m)$	$b$	$\mu_l(Kg.m^{-1}.s^{-1})$
0.27	0.9715	$10^{-4}$	991.5	-0.0323	2.5	$4.61027 \cdot 10^{-4}$
$X_0 (mgC/L)$	$S_0 (mgC/L)$	$[CO_2]_0 (mgC/L)$	$[CH_4]_0 (mgC/L)$			
1751	0	0	0			
$p_0(m)$ in $\Omega$	$p_D(m)$ on $\Gamma_D$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ on $\Gamma_N$				
-0.7	-0.1020	0				

# Résultats numériques

$$B_0(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \{0 \leq x \leq L/2, 0 \leq y \leq L \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 2 & \text{dans } \{L/2 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 3 & \text{dans } \{0 \leq x \leq L, 0 < y < L \text{ et } L/2 \leq z < L\}. \end{cases}$$

$$\bar{D}_5 = \{D_X = 10^{-9}, D_S = 10^{-5}, D_B = 10^{-4}\} \text{ et}$$

$$\bar{D}_5^c = \{D_X = 10^{-9}, D_S = 10^{-5}, D_B = 10^{-4}, D_{CO_2} = 10^{-3}, D_{CH_4} = 10^{-3}\}.$$

## Résultats numériques

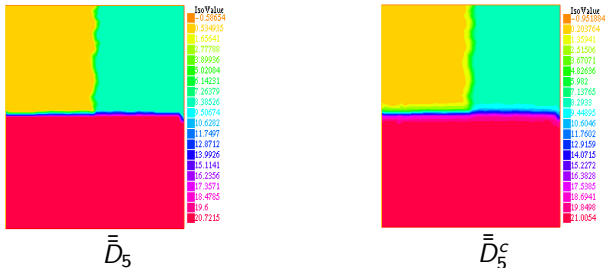


Figure – 5 – La production de méthane (en mgC/L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane avec  $\bar{D}_5$  et  $\bar{D}_5^c$  en 2D.

- presque la même chose
- la valeur moyenne n'augmente pas
- avec  $\bar{D}_5$  (7,605 s en 2D et 71 s en 3D)  $\bar{D}_5$  et avec  $\bar{D}_5^c$  (8,7 s en 2D, et 103 s en 3D)

## Numerical results

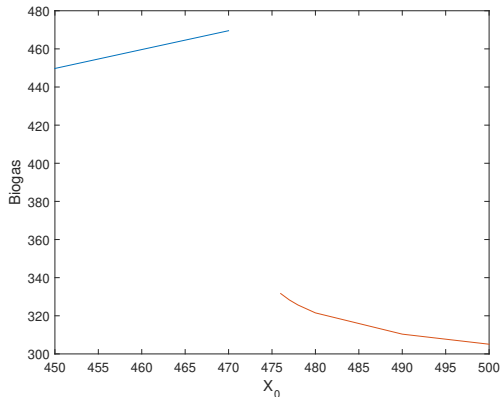


Figure – Production de biogaz (en mgC / L) en fonction de  $X_0$  (en mgC / L) en utilisant la loi de Haldane avec  $B_0 = 2$ ,  $K_I = 10$  et la diffusion  $\bar{D}_5$

## Résultats numériques

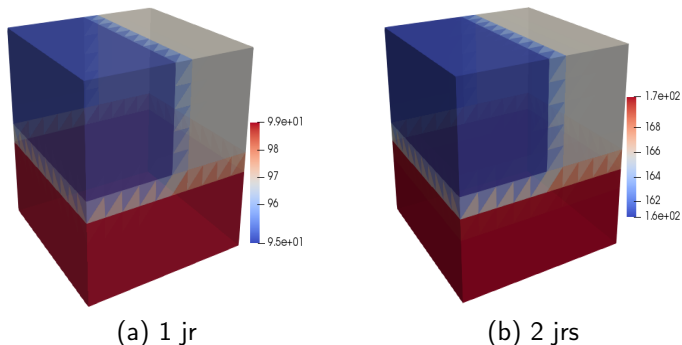
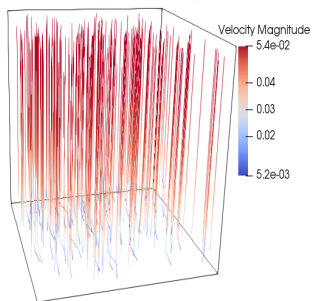


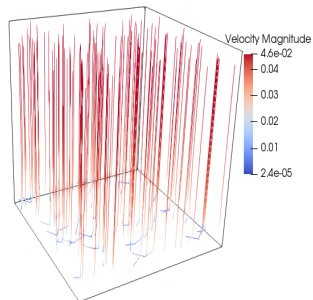
Figure – 6 – Evolution de la production du biogaz (mgC/L) avec la loi de Haldane



## Résultats numériques



(a) 1 jr



(b) 2 jrs

Figure – 7 – La vitesse du lixiviat (m/d) avec la loi de Haldane

## Résultats numériques

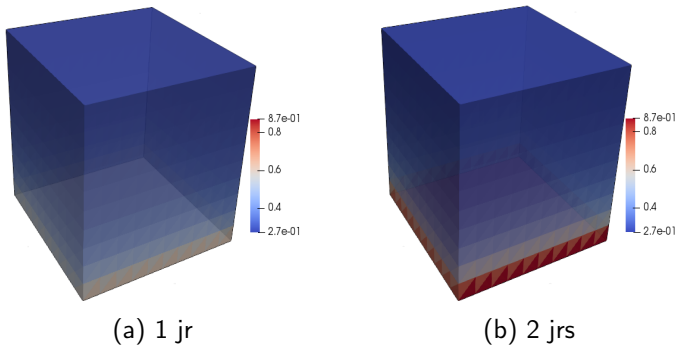


Figure – 8 – La teneur en eau  $\theta$  en utilisant la loi de Haldane






## Conclusion

La résolution des équations d'écoulement du lixiviat est l'un des chemins importants pour améliorer la situation

- ⇒ Savoir dans quel endroit et quand la production du biogaz est meilleure ou non.
- ⇒ Une bonne prise de décision

## Perspective

- A partir d'un instant critique où le biogaz commence à décroître : mettre une condition de Neumann non homogène  
→ pour une production optimale du biogaz.
- L'introduction de la teneur en eau dans les équations qui décrivent l'hydrolyse et la méthanogénese
- Modèle d'écoulement multiphasique fortement couplé.

-  Aran, C. (2001), *Modélisation des Ecoulements de Fluides et des Transferts de Chaleur au Sein des Déchets Ménagers. Application à la Réinjection de Lixiviats dans un Centre de Stockage.* (Doctoral dissertation)
-  Belhachmi, Z., Mghazli, Z., Ouchtout, S. (2021), *Mathematical modelling and numerical approximation of a leachate flow in the anaerobic biodegradation of waste in a landfill.* Journal of Mathematics and Computers in Simulation, Volume 185, pp 174-193.
-  Bothe, D., Fischer, A., Pierre, M., Rolland, G. (2017), *Global wellposedness for a class of reaction-advection-anisotropic-diffusion systems.* Journal of Evolution Equations, 17(1), 101-130.
-  Ouchtout S., Mghazli, Z., Harmand, J., Rapaport, A., Belhachmi, Z. (2020), *Analysis of an anaerobic digestion model in landfill with mortality term,* Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 19, Number 4, pp 2333-2346.
-  Rouez, M. (2008), *Dégradation anaérobie de déchets solides : Caractérisation, facteurs d'influence et modélisations.* Laboratoire de Génie Civil et d'Ingénierie Environnementale. Lyon, Institut National des Sciences Appliquées Docteur, 259.

Merci de votre attention