



# Remerciement

Je remercie tout d'abord le Professeur Belhassan Dehman d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse.

Je remercie également le Professeur Frédéric JEAN pour la confiance et le soutien sans faille qu'il m'a accordé tout au long de ce travail. Il m'a conseillé avec franchise et efficacité dans mes choix scientifiques tout en m'en laissant la liberté. J'ai beaucoup appris à son contact sur la façon de mener un travail de recherche dans le domaine du contrôle optimal. Ses conseils avisés, son écoute et ses relectures ont été essentiels pour la réussite de cette thèse.

Je remercie aussi Mme Nahla abdlatif pour son soutien, sa disponibilité et l'aide qu'elle m'a apporté tout au long de ma thèse. Elle a largement dépassé son rôle de membre du comité d'encadrement par le temps qu'elle m'a consacré. Sans son application et sa rigueur scientifique, cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Je remercie également M. Jérôme Harmand pour avoir accepté l'encadrement de mon doctorat. Il a toujours été disponible pour me fournir de précieuses données concernant les procédés biologiques. Je garde en mémoire son accueil et son soutien à Montpellier au début de ma thèse.

Je remercie aussi, les professeurs TERENCE Bayeb et Chaker Jammazi, pour s'être penchés sur cet ouvrage et l'avoir enrichi par leurs questions et commentaires.

Merci au professeur Mohamed Ali Jendoubi, d'avoir accepté d'être président du jury de ma thèse.

# Contents

<b>1</b>	<b>Cas général du problème de contrôle optimal</b>	<b>9</b>
1	Introduction . . . . .	9
2	Problème de contrôle optimal . . . . .	9
3	Cas du problème de temps minimal . . . . .	10
3.1	Détection de la structure du contrôle à l'aide des méthodes directes . . . . .	11
3.2	Vérification numérique du <i>PMP</i> . . . . .	12
4	Minimisation d'un compromis . . . . .	14
4.1	Application du PMP . . . . .	15
4.2	Cas où $J$ est strictement convexe . . . . .	16
4.3	Cas où $J(u) = u$ : Problème du compromis entre le temps et la consommation d'oxygène . . . . .	22
5	Conclusion . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Une approche géométrique pour la résolution d'un problème de contrôle optimal</b>	<b>27</b>
1	Introduction . . . . .	27
2	Problème de contrôle en temps minimal . . . . .	28
2.1	Modèle . . . . .	28
2.2	Problème convexifié . . . . .	30
2.3	Retour au problème ( $\mathcal{P}_0$ ) . . . . .	36
3	Application . . . . .	37
3.1	Modèle . . . . .	37
3.2	Validation du modèle . . . . .	39
3.3	Simulations numériques . . . . .	41
4	Conclusion . . . . .	53

# List of Figures

1.1	Une solution pour le problème $(\mathcal{P}^0)$ calculée par <i>bocop</i> pour $z_0 = 50$ . . . . .	11
1.2	Une solution calculée par <i>bocop</i> pour $z_0 = 20$ . . . . .	12
1.3	Solution de $(P^1)$ calculée par <i>bocop</i> pour $s_3^0 = 20$ . . . . .	18
1.4	Solution de $(P^1)$ calculée par <i>bocop</i> pour $s_3^0 = 50$ . . . . .	18
1.5	Les courbes de $m^\alpha$ et du temps en fonction de $\alpha$ . . . . .	20
1.6	Les courbes de $m^\alpha$ et du temps en fonction de $\alpha$ . . . . .	21
1.7	$E^\alpha(u)$ et $E_{min}$ en fonction de $\alpha$ . . . . .	21
1.8	A gauche: Variation du pourcentage de gain en énergie en fonction de $\alpha$ . A droite; Variation du pourcentage de la perte du temps en fonction de $\alpha$ . . . . .	21
1.9	$C^\alpha(u)$ et $C_{min}$ en fonction de $\alpha$ . . . . .	23
1.10	$t^\alpha(u)$ et $t_{min}$ en fonction de $\alpha$ . . . . .	24
1.11	Le pourcentage de gain en consommation d'oxygène (en vert) et du perte en temps (en rouge). . . . .	24
1.12	Une solution calculée par <i>bocop</i> pour $\alpha = 1$ . . . . .	25
1.13	Une solution calculée par <i>bocop</i> pour $\alpha = 50$ . . . . .	25
2.1	Passage de $(\mathcal{P}_0)$ à $(\mathcal{P})$ . . . . .	30
2.2	Les ensembles $V$ , $\partial V_p$ et $\mathbb{R}_+ \partial V_p$ . . . . .	33
2.3	Détermination géométrique du point $v_{\bar{5}}$ . . . . .	34
2.4	La partition de $(\mathbb{R}_+)^2$ en trois zones $Z_1$ , $Z_2$ et $Z_3$ . . . . .	35
2.5	La courbe de $\mu_1$ (en vert) et la courbe de $\mu_2$ (en rouge). . . . .	41
2.6	Les zones $Z_2^0$ , $Z_3^0$ , $\mathcal{Z}_3^0$ et $\mathcal{Z}_2^0$ . . . . .	42
2.7	Les zones $Z_2^{10}$ , $Z_3^{10}$ , $\mathcal{Z}_3^{10}$ et $\mathcal{Z}_2^{10}$ . . . . .	42
2.8	Les zones $Z_2^{20}$ , $Z_3^{20}$ , $\mathcal{Z}_3^{20}$ et $\mathcal{Z}_2^{20}$ . . . . .	42
2.9	Le temps de la trajectoire optimale $T_{min}$ en fonction de $\alpha$ . . . . .	43
2.10	$x_1$ , $x_2$ , $s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 0$ . . . . .	43
2.11	$x_1$ , $x_2$ , $s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 10$ . . . . .	44
2.12	$x_1$ , $x_2$ , $s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 20$ . . . . .	44
2.13	La courbe de $\mu_1$ (en vert) et la courbe de $\mu_2$ (en rouge). . . . .	45
2.14	Les zones $Z_2^0$ , $Z_3^0$ , $\mathcal{Z}_3^0$ et $\mathcal{Z}_2^0$ . . . . .	45

2.15	Les zones $Z_2^{10}, Z_3^{10}, \mathcal{Z}_3^{10}$ et $\mathcal{Z}_2^{10}$ .	46
2.16	Les zones $Z_2^{20}, Z_3^{20}, \mathcal{Z}_3^{20}$ et $\mathcal{Z}_2^{20}$ .	46
2.17	$x_1, x_2, s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 0$ .	47
2.18	$x_1, x_2, s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 10$ .	47
2.19	$x_1, x_2, s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 20$ .	48
2.20	La courbe de $\mu_1$ (en vert) et la courbe de $\mu_2$ (en rouge).	48
2.21	Les zones $Z_2^0, Z_3^0, \mathcal{Z}_3^0$ et $\mathcal{Z}_2^0$ .	49
2.22	Les zones $Z_2^{10}, Z_3^{10}, \mathcal{Z}_3^{10}$ et $\mathcal{Z}_2^{10}$ .	49
2.23	Les zones $Z_2^{20}, Z_3^{20}, \mathcal{Z}_3^{20}$ et $\mathcal{Z}_2^{20}$ .	49
2.24	$x_1, x_2, s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant ( $\alpha = 0, 10, 20$ ).	50
2.25	La courbe de $\mu_1$ (en vert) et la courbe de $\mu_2$ (en rouge).	51
2.26	Les zones $Z_2^0, Z_3^0, \mathcal{Z}_3^0$ et $\mathcal{Z}_2^0$ .	51
2.27	Les zones $Z_2^{10}, Z_3^{10}, \mathcal{Z}_3^{10}$ et $\mathcal{Z}_2^{10}$ .	52
2.28	Les zones $Z_2^{20}, Z_3^{20}, \mathcal{Z}_3^{20}$ et $\mathcal{Z}_2^{20}$ .	52
2.29	Le temps de la trajectoire optimale $T_{min}$ en fonction de $\alpha$ .	53
2.30	$x_1, x_2, s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 0$ .	53
2.31	$x_1, x_2, s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 10$ .	54
2.32	$x_1, x_2, s_1$ et $s_2$ en fonction de $t$ et le contrôle $u$ correspondant pour $\alpha = 20$ .	54

# Résumé

Cette thèse se situe dans le cadre du traitement biologique de la pollution (en l'occurrence l'azote et le carbone) dans les eaux usées. L'objectif est de trouver une stratégie optimale d'injection de l'oxygène dans un réacteur biologique séquentiel discontinu (SBR) Ceci se traduit mathématiquement, par la résolution d'un problème de contrôle optimal minimisant le temps de réaction d'une part et le compromis du temps et de l'énergie de l'oxygène consommé. Nous nous intéressons dans un premier temps à un modèle tridimensionnel dans lequel la concentration en oxygène est la variable de contrôle et où les phases aérobie et anoxique peuvent avoir lieu simultanément. Nous donnons quelques résultats mathématiques et nous faisons une étude numérique du problème de contrôle optimal associé. Nous proposons ensuite un modèle qui fait intervenir deux réactions biologiques, l'une étant aérobie et l'autre anoxique, nécessaires pour traiter deux types de substrats distincts. On résout un problème de contrôle optimal en temps minimal puis en temps et en énergie. On prouve l'existence de trajectoires optimales et on détermine la stratégie optimale dans ce cas. L'étude mathématique est suivie de simulations numériques qui confirment les résultats obtenus.

Mots clés : Modélisation, procédés biologiques, contrôle optimal, réacteur biologique séquentiel discontinu, traitement de l'eau, temps minimal.

**Abstract**

This thesis focuses on the biological treatment of pollution (the nitrogen and carbon) in the wastewater. The objective is to find an optimal oxygen injection strategy in a sequencing batch bioreactor (SBR). This leads to resolve an optimal control problem of minimizing the reaction time on one hand and a compromise of the time and the energy of oxygen consumed. We are interested at first in a three-dimensional model in which the oxygen concentration is the control variable and where the aerobic and anoxic phases may take place simultaneously. We give some mathematical results and we make a numerical study of the associated optimal control problem. We then propose a model that involves two biological reactions, one being aerobic and the other anoxic, required for processing two types of substrates. We solve an optimal control problem in minimal time and minimal time and energy. We prove the existence of optimal trajectories and we determine the optimal strategy in this case. The mathematical study is followed by numerical simulations which confirm the obtained results.

Keywords: Modeling, biological processes, optimal control, sequencing batch bioreactor, water treatment, minimal time.

# Introduction générale

De part leur simplicité de mise en oeuvre, les systèmes biologiques sont aujourd'hui les procédés les plus utilisés pour le traitement des eaux. Le traitement biologique des polluants organiques et/ou chimiques contenus dans ces eaux usées consiste en la transformation de la matière biodégradable en boues (également appelée biomasse qui se trouve sous forme solide dans le système). Le principe du traitement biologique est de mettre en contact des micro-organismes et les polluants dans des enceintes (réacteurs) dans lesquelles il est possible de contrôler les conditions environnementales. Dans une seconde enceinte, appelée décanteur ou clarificateur, les boues et l'eau épurée sont séparés. En l'absence d'agitation, les bactéries s'agglomèrent en floccs qui, plus denses que l'eau, décantent sous l'effet de la gravité. Les boues sont recyclées ou éliminées alors que l'eau traitée est rejetée dans l'environnement. Plusieurs technologies permettent de mettre en oeuvre ces principes de traitement et de séparation pour l'épuration des eaux usées. Parmi ces technologies, les réacteurs séquentiels discontinus (SBR pour Sequencing Batch Reactors) présentent certains avantages par rapport à leur homologues continus. En séparant dans le temps plutôt que dans l'espace les phases de traitement et de séparation évoquées ci-dessus, les SBR permettent notamment un meilleur contrôle du procédé et donc de la qualité des eaux rejetées. Le prix à payer est que le système considéré fonctionne maintenant en mode batch et non plus en continu. Il nécessite donc la mise en place en amont d'un bassin de stockage des eaux usées qui arrivent, elles, continuellement à la station. Dans ce cas, un problème est de minimiser le temps pendant lequel le réacteur de traitement est indisponible, c'est-à-dire le temps de réaction nécessaire au traitement des eaux si on suppose le temps de décantation constant. Plusieurs travaux se sont intéressés à la mise au point d'algorithmes de contrôle optimal en temps minimal des SBR [1, 2], et, en particulier, d'une stratégie permettant de déterminer les instants de commutation entre phases aérobie et anoxique, pour minimiser le temps total de réaction [3]. Pour des raisons techniques, il n'avait pas été possible dans les travaux de Mazouni [1],[3] d'envisager de moduler la concentration en oxygène et seules des situations purement aérobie (saturation de la concentration en oxygène) et purement anoxique (pas d'injection d'oxygène) avaient été modélisées. Or, des systèmes de régulation fine de la concentration en oxygène sont aujourd'hui disponibles sur le marché. On se propose donc de revisiter ce problème de contrôle optimal en temps minimal

des SBR dans un contexte où la concentration en oxygène serait maintenue suffisamment faible pour autoriser les réactions aérobies et anoxiques de se réaliser simultanément. Cette simultanéité de réactions est classique dans les procédés à boues activées et bien modélisée dans les modèles ASM de l'IWA [4]. Par suite, il s'agit de rechercher dans quelle mesure une telle approche de modulation de la concentration en oxygène pourrait être meilleure que la solution par alternances de phases proposée dans [3].

Cette thèse s'organise comme suit : au premier chapitre, nous abordons le principe de dépollution biologique de l'eau, nous présentons les différentes matières nuisibles ainsi que les processus utilisés pour le traitement de chaque type de pollution. Nous introduisons aussi les outils mathématiques utilisés en donnant une introduction à la théorie de contrôle optimal. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude numérique de quelques problèmes de contrôle optimal à trois dimensions dont les fonctions coût sont : temps, compromis temps/énergie et temps/consommation. Au troisième chapitre, on effectue une étude d'un problème de contrôle optimal à deux dimensions. Enfin, nous donnons une conclusion générale sur nos résultats et des perspectives de nos travaux.

# Chapter 1

## Cas général du problème de contrôle optimal

### 1 Introduction

Le problème posé au chapitre 1 nécessite de considérer un modèle en 3 dimensions. Un modèle pour lequel le problème de commande est très difficile à résoudre directement. C'est pour cette raison qu'on résout le problème essentiellement d'une manière numérique. Dans la première partie de ce chapitre, on s'intéresse à la mise au point d'une stratégie de contrôle optimal en temps minimal, puis, dans une seconde partie, à la synthèse d'une commande optimale en temps et en énergie, afin de minimiser à la fois le temps de réaction et la quantité d'oxygène consommé. Enfin, on s'intéresse à la synthèse optimale du problème de compromis entre le temps et l'énergie. On commence par donner quelques propriétés théoriques du problème.

### 2 Problème de contrôle optimal

Dans cette section, on se propose de résoudre un cas particulier du problème ( $P$ ) du chapitre 1 où on prend

$\mu_1(s_1, u) = f(s_1)u$ ,  $\mu_2(s_2, u) = f(s_1)g(s_2)(1 - u)$  et  $\mu_3(s_3, u) = h(s_3)u$  avec  $f(s_1) = \mu_{max}^1 \frac{s_1}{K_1 + s_1}(m_1 - s_1)$ ,  $g(s_2) = \rho \frac{s_2}{K_2 + s_2}$  et  $h(s_3) = \mu_{max}^2 \frac{s_3}{K_3 + s_3}(m_2 - s_3)$ , où  $m_1 = s_1(0) + x_1(0)$  et  $m_2 = s_3(0) + x_2(0)$ .

Le système s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -f(s_1)u - f(s_1)g(s_2)(1 - u), \\ \dot{s}_2 = \bar{\alpha}h(s_3)u - \bar{\beta}f(s_1)g(s_2)(1 - u), \\ \dot{s}_3 = -h(s_3)u. \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  sont deux constante réelles.

Le système (2.1) peut s'écrire sous la forme affine suivante:

$$\begin{cases} \dot{S} = F(S) + uG(S), \\ S(0) = S_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $S = (s_1, s_2, s_3)^T$  et  $F$  et  $G$  deux champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définis par:

$$F(S) = \begin{pmatrix} -f(s_1)g(s_2) \\ -\bar{\beta}f(s_1)g(s_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } G(S) = \begin{pmatrix} -f(s_1)(1 - g(s_2)) \\ \bar{\alpha}h(s_3) + \bar{\beta}f(s_1)g(s_2) \\ -h(s_3) \end{pmatrix}$$

On cherche à minimiser une fonction coût de la forme

$$t(u) + \alpha \int_0^{t(u)} J(u) ds,$$

où  $\alpha \geq 0$  et  $J$  est une fonction continue positive qui s'annule en 0. Cette fonction coût représente un compromis entre le temps et la quantité  $\int_0^{t(u)} J(u) ds$  ( $J = u$  pour la consommation d'oxygène et  $J = u^2$  pour l'énergie d'aération). Ce problème de contrôle optimal s'écrit donc sous la forme:

$$(\mathcal{P}^\alpha) \begin{cases} \text{Minimiser } \int_0^{t(u)} (1 + \alpha J(u)) ds, \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ S \text{ solution de (2.2); } S(0) = S^0 \text{ et } S(t(u)) \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où la cible  $\mathcal{C}$  est définie par:

$$\mathcal{C} = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}_+^3; s_1 < \bar{s}_1, s_2 < \bar{s}_2 - \bar{\alpha}s_3, s_3 < \bar{s}_3\},$$

avec  $\bar{s}_1, \bar{s}_2$  et  $\bar{s}_3$  des constantes positives.

### 3 Cas du problème de temps minimal

Le problème de contrôle en temps minimal associé au modèle (2.2) est:

$$(\mathcal{P}^0) \begin{cases} \text{Minimiser } t(u), \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ S(0) = (s_1^0, s_2^0, s_3^0), \\ S \text{ solution de (2.2) et } S(t(u)) \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

L'existence de solution pour ce problème est un cas particulier de la proposition 4.3.

### 3.1 Détection de la structure du contrôle à l'aide des méthodes directes

Le problème ( $\mathcal{P}^0$ ) a été résolu partiellement dans le cadre des travaux de thèse de D.Mazouni [1]; qui a déterminé les solutions optimales parmi toutes les solutions admissibles dont les contrôles prennent d'une manière alternative les valeurs 0 et 1 avec au plus deux changements de valeurs. Comme on a un ensemble de contrôle plus grand qui est l'intervalle  $[0, 1]$ , on peut espérer trouver des trajectoires qui atteignent la cible en temps inférieur au temps trouvé par D.Mazouni. Pour cela, on va effectuer des simulations numériques afin de résoudre notre problème par une méthode directe en utilisant le logiciel *bocop*. Nous avons utilisé les mêmes données numériques que dans les tests effectués par D. Mazouni dans [3]. Ce choix est justifié par la possibilité de pouvoir comparer les résultats trouvés avec les résultats du problème ( $\mathcal{P}^0$ ). Dans les simulations suivantes, on va considérer aussi la même stratégie que D. Mazouni. Cette stratégie consiste à modifier  $s_3^0$  dans  $\{10, \dots, 50\}$ .

On considère les données numériques suivantes:

$\mu_{max}^1$	$\mu_{max}^2$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$
0.003	0.024	145	130	30	0.5	0.35	0.058
$\bar{s}_1$	$\bar{s}_2$	$\bar{s}_3$	$s_0^1$	$s_0^2$	$s_0^3$	$m_1$	$m_2$
35	25	10	700	30	variable	4000	500

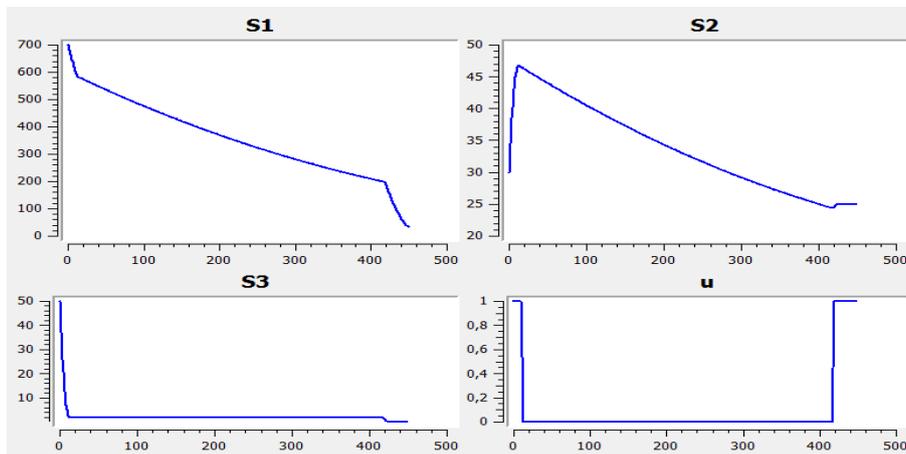
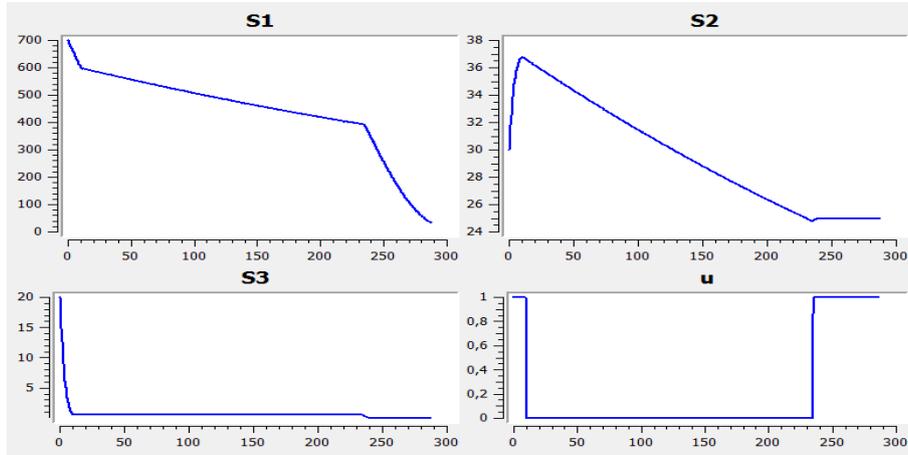


Figure 1.1: Une solution pour le problème ( $\mathcal{P}^0$ ) calculée par *bocop* pour  $z_0 = 50$

Dans la figure 1.2 (respectivement dans la figure 1.1, pour  $s_0^3 = 20$  (respectivement  $s_0^3 = 50$ ), on représente l'évolution de la variable  $s_1$  (concentration en carbone) en fonction du temps, ainsi que celles des concentrations en nitrate  $s_2$  et en azote  $s_3$ . La variable de commande  $u$  (concentration en oxygène injecté) est aussi donnée en fonction du temps.


 Figure 1.2: Une solution calculée par *bocop* pour  $z_0 = 20$ 

Les solutions obtenues sont identiques à celles obtenues par la stratégie développée par D. Mazouni. Elles ont une structure bang-bang. Du fait que les méthodes directes n'ont pas une grande précision et du fait qu'on peut aboutir sur un minimum local, nous allons vérifier numériquement dans la section suivante que les solutions données par le logiciel *bocop* vérifient bien le principe de maximum de Pontryagin (*PMP*).

### 3.2 Vérification numérique du *PMP*

Dans cette section, on va vérifier numériquement si les différentes trajectoires données par le logiciel *Bocop*, ou, de façon équivalente, par la stratégie de Mazouni, vérifient bien le *PMP*. Dans le cas contraire on peut affirmer qu'elles ne sont pas optimales. L'existence d'un vecteur adjoint  $P(\cdot)$  vérifiant le *PMP* est équivalente à trouver un vecteur  $P(\cdot)$  qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = F(S) + u_{opt}G(S), \\ \dot{P} = -\frac{\partial F(S)}{\partial S}P - u_{opt}\frac{\partial G(S)}{\partial S}P, \\ S(0) = S_0, \\ S(t_f) \in \mathcal{C}, \\ \langle P(t_f), Z - S(t_f) \rangle \geq 0, \quad \forall Z \in \mathcal{C}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec  $u_{opt}$  est le contrôle déterminé par la stratégie définie par D. Mazouni. Ce contrôle prend alternativement les valeurs 0 et 1 avec une ou deux commutations au plus. Ce contrôle est complètement déterminé par les

instants de commutation  $t_1$  et  $t_2$  i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, t_1], \\ 0 & \text{si } t \in [t_1, t_2], \\ 1 & \text{si } t \in [t_2, t_f]. \end{cases}$$

Le système (3.1) s'écrit d'une manière équivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_1 = -f(s_1)u_{opt} - f(s_1)g(s_2)(1 - u_{opt}), \\ \dot{s}_2 = \alpha h(s_3)u_{opt} - \beta f(s_1)g(s_2)(1 - u_{opt}), \\ \dot{s}_3 = -h(s_3)u_{opt}, \\ \dot{p}_1 = f'(s_1)p_1, \\ \dot{p}_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = \alpha p_2 + p_3 h'(s_3); \\ (s_1(0), s_2(0), s_3(0)) = (s_1^0, s_2^0, s_3^0), \\ (s_1(t_f), s_2(t_f), s_3(t_f)) = (s_1^f, s_2^f, s_3^f), \\ (p_1(0), p_2(0), p_3(0)) = (\cos(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi)), \\ \langle P(t_f), Z - S(t_f) \rangle \geq 0, \quad \forall Z \in \mathcal{C}, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ ,  $\phi \in [0, \pi[$ ,  $S = (s_1, s_2, s_3)$  et  $P = (p_1, p_2, p_3)$ .

On rappelle que le hamiltonien du problème ( $\mathcal{P}^0$ ) est donné par :

$$H(S, P, u, P^0) = \langle P(t), F(S(t)) \rangle + u_{opt} \langle P(t), G(S(t)) \rangle + P^0; \quad P^0 \geq 0$$

Le choix d'utiliser les coordonnées sphériques dans l'initialisation du vecteur adjoint est justifié par le fait qu'on n'a pas de contrainte sur la direction de  $P(0)$ . De plus, quitte à multiplier  $(P, P^0)$  par  $1/\|P(0)\|$  et du fait que le hamiltonien  $H$  est linéaire en  $(P, P^0)$ , on peut supposer que  $\|P(0)\| = 1$ .

On s'inspire de la méthode de tir pour trouver un couple  $(\theta_0, \varphi_0)$  tel que le système (3.2) soit vérifié. On discrétise respectivement les intervalles  $[0, 2\pi[$  et  $[0, \pi[$  en  $N_1$  et  $N_2$  sous-intervalles. On cherche ensuite, un couple  $(\theta_i, \varphi_j)$  avec  $\theta_i = 2i\pi/N_1$  et  $\varphi_j = j\pi/N_2$  de telle sorte que le vecteur adjoint trouvé vérifie le *PMP* c'est à dire vérifie la condition de transversalité et la

propriété suivante de la fonction de commutation  $\phi$ :

$$\phi(t) = \begin{cases} \langle P(t), G(S(t)) \rangle > 0 & \text{si } t \in [0, t_1], \\ \langle P(t), G(S(t)) \rangle < 0 & \text{si } t \in [t_1, t_2], \\ \langle P(t), G(S(t)) \rangle > 0 & \text{si } t \in [t_2, t_f]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Les simulations numériques sont en cours. Nous avons en fait réalisé des simulations qui montraient (numériquement du moins) que les trajectoires de Mazouni étaient bien solutions du PMP. Cependant, lors de la dernière lecture de ce document, en réexaminant les résultats et la façon dont ils sont obtenus nous avons eu un doute sur leur validité. Nous préférons donc ne pas les insérer dans ce mémoire tant qu'ils n'ont pas été corrigés. Notre conjecture reste toutefois que les trajectoires de Mazouni sont bien solutions du PMP.

## 4 Minimisation d'un compromis

Le problème de contrôle optimal qu'on considère dans cette section est le suivant:

$$(\mathcal{P}^\alpha) \begin{cases} \text{Minimiser } \int_0^{t(u)} 1 + \alpha J(u(s)) ds, \quad \alpha > 0, \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ S(0) = (s_1^0, s_2^0, s_3^0), \\ S \text{ solution de (2.2) et } S(t(u)) \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où la fonctionnelle  $J$  est continue, positive et nulle en 0.

En appliquant la technique de [31, Prop. 3.1], on peut montrer l'existence de solutions pour des coûts  $J(u)$  strictement convexes tels qu'il existe  $p > 1$  vérifiant  $J(u) > |u|^p$  pour tout  $u$ . Dans le cas  $J(u) = u$ , on peut appliquer un théorème de Filippov, voir 4.3.

### 4.1 Application du PMP

D'après le PMP, si le contrôle  $u(\cdot)$  associé à la trajectoire  $S(\cdot)$  est optimal sur  $[0, t(u)]$  pour le problème  $(\mathcal{P}^\alpha)$ , alors il existe un vecteur adjoint  $P(\cdot)$ , et un réel  $P^0 \leq 0$  vérifiant:

- les équations adjointes,

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \frac{\partial H}{\partial P}(S(t), P(t), P^0, u(t)), \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial H}{\partial S}(S(t), P(t), P^0, u(t)), \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $H(S, P, P^0, u) = \langle P, F(S) \rangle + u \langle P, G(S) \rangle + P^0(1 + \alpha J(u))$  est le hamiltonien, associé aux problèmes  $(\mathcal{P}^\alpha)$

- le couple  $(P, P^0)$  est non trivial avec  $P^0 \leq 0$ ;
- la condition suivante de maximisation: pour presque tout  $t \in [0, t(u)]$ ;

$$H(S(t), P(t), P^0, u(t)) = \max_{v \in [0,1]} H(S(t), P(t), P^0, v); \quad (4.2)$$

- le hamiltonien est identiquement nul, i.e.

$$H(S(t), P(t), P^0, u(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, t(u)]; \quad (4.3)$$

(car le système est autonome et le temps final est non fixé)

- la condition de transversalité suivante:

$$\langle P(t(u)), Z - S(t(u)) \rangle \geq 0, \quad \forall Z \in \mathcal{C}. \quad (4.4)$$

Le résultat suivant permet déjà d'éliminer une possibilité pour les extrémales, celle des arcs singuliers anormaux.

**Proposition 4.1** *Il n'existe pas d'extrémale anormale pour le problème  $(\mathcal{P}^\alpha)$  qui contient un arc singulier.*

**Preuve** Supposons qu'il existe une extrémale anormale qui contient un arc singulier. Alors le hamiltonien associé aux problèmes  $(\mathcal{P}^\alpha)$  s'écrit:

$$H(S, P, u) = \langle P, F(S) \rangle + u \langle P, G(S) \rangle,$$

où  $P$  est la fonction adjointe qui ne s'annule pas. De plus, il existe un intervalle  $I_0$  tel que la fonction de commutation  $\phi(\cdot) = \langle P(\cdot), G(S(\cdot)) \rangle$  est identiquement nulle sur cet intervalle. En dérivant  $\phi$  par rapport à  $t$ , il vient

$$\langle P(t), [F, G](S(t)) \rangle = 0, \quad \forall t \in I_0,$$

où  $[\cdot, \cdot]$  est le crochet de Lie de champs de vecteurs. Comme le hamiltonien  $H$  est identiquement nul (le système est autonome et le temps final est libre), on déduit que  $\langle P(t), F(S(t)) \rangle = 0$  et  $\langle P(t), G(S(t)) \rangle = 0, \forall t \in I_0$ . Par conséquent sur l'intervalle  $I_0$  le vecteur  $P(t)$  est orthogonal aux vecteurs  $F(S(t))$ ,  $G(S(t))$  et  $[F, G](S(t))$ . Calculons  $[F, G](S)$ , on a

$$DF(S) = \begin{pmatrix} -f'(s_1)g(s_2) & -f(s_1)g'(s_2) & 0 \\ -\beta f'(s_1)g(s_2) & -\beta f(s_1)g'(s_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$DG(S) = \begin{pmatrix} -f'(s_1)(1 - g(s_2)) & f(s_1)g'(s_2) & 0 \\ \beta f'(s_1)g(s_2) & \beta f(s_1)g'(s_2) & \alpha h'(s_3) \\ 0 & 0 & -h'(s_3) \end{pmatrix}$$

avec  $f(s_1) = \mu_{max}^1 \frac{s_1}{K_1 + s_1} (m_1 - s_1)$ ,  $g(s_2) = \rho \frac{s_2}{K_2 + s_2}$  et  $h(s_3) = \mu_{max}^2 \frac{s_3}{K_3 + s_3} (m_2 - s_3)$ . Or,  $[F, G](S) = DF(S)G(S) - DG(S)F(S)$ . Par un calcul élémentaire, on obtient

$$[F, G](S) = \begin{pmatrix} -\alpha f(s_1)g'(s_2)h(s_3) \\ \beta f(s_1)f'(s_1)g'(s_2) - \alpha\beta f(s_1)g'(s_2)h(s_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme la fonction  $h$  ne s'annule pas le long d'une trajectoire admissible,  $[F, G]$  et  $G$  sont linéairement indépendants. De plus,  $[F, G]$  et  $F$  sont dépendants si le déterminant des vecteurs obtenus en projetant  $[F, G]$  et  $F$  sur le plan  $(s_1, s_2)$  est nul. Ce déterminant est égal à  $-\beta f^2(s_1)g^2(s_2)f'(s_1)$ . Or, pour les modèles de dépollution qu'on considère  $f$ ,  $f'$  et  $g$  ne s'annulent sur aucun intervalle. On conclut donc que  $[F, G]$  et  $F$  sont indépendants et par suite,  $\det(F(S), G(S), [F, G](S)) \neq 0$ . Il s'ensuit que  $P(t) = 0, \forall t \in I_0$ . Cela contredit le fait que le vecteur adjoint est non trivial le long d'une extrémale.  $\square$

## 4.2 Cas où $J$ est strictement convexe

Supposons maintenant que  $J$  est strictement convexe. Par exemple,  $J(u) = u^2$ . Dans cette section, on restreint notre étude sur les extrémales normales. D'après la proposition 2.1 et comme les équations hamiltoniennes sont linéaires par rapport à  $(P, P^0)$ , on peut supposer que  $P^0 = -1$ . La fonction de commutation est donnée par:

$$\phi(t) = \langle P(t), G(S(t)) \rangle - \alpha J'(u(t)).$$

De plus, on a:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 u} H(S(t), P(t), P^0, u(t)) = -\alpha J''(u).$$

**Proposition 4.2** *Il n'existe pas de contrôle bang-bang pour le problème  $(\mathcal{P}^\alpha)$ .*

**Preuve** Comme la fonction du coût  $\int_0^{t(u)} (1 + \alpha J(u)) ds$  est strictement convexe, alors d'après [[28], Théorème 6.1] le contrôle optimal associé au problème  $(\mathcal{P}^\alpha)$  est continu. On déduit donc qu'il n'existe pas d'arcs bang-bang.  $\square$

On va faire maintenant une étude numérique pour  $J(u) = u^2$ . Pour trouver la structure du contrôle optimal associé au problème  $(\mathcal{P}^\alpha)$ , on va utiliser les méthodes directes via le logiciel bocop. Pour des raisons spécifiques au logiciel Bocop, on va se ramener à un problème en temps minimal. En effet, quand la fonction coût n'est pas le temps, Bocop exige l'introduction d'une variable d'état auxiliaire dont la dérivée est égale à la fonction coût qu'on cherche à minimiser, ce qui revient à augmenter la dimension de la variable

d'état et est très pénalisant car *bocop* utilise des méthodes directes qui sont coûteuses en mémoire et en temps de calcul.

Pour ramener le problème  $(\mathcal{P}^\alpha)$  à un problème en temps minimal, on fait une reparamétrisation du temps en posant  $s(t) = \int_0^t (1 + \alpha u(\tau)^2) d\tau$ . En effet, si on considère le système de contrôle général  $\dot{x} = f(x, u)$  et on pose  $ds = (1 + u(t)^2)dt$ , ceci implique que :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{f(x, u)}{1 + \alpha u^2}.$$

Donc le problème  $(\mathcal{P}^\alpha)$  est équivalent au problème  $(\mathcal{P}_0^\alpha)$  suivant:

$$(\mathcal{P}_0^\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } t(u), \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ S(0) = (s_1^0, s_2^0, s_3^0), \\ S \text{ solution de (4.5) et } S(t(u)) \in \mathcal{C}, \end{array} \right.$$

avec (4.5) est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = F(S)/(1 + \alpha u^2) + u/(1 + \alpha u^2)G(S), \\ S(0) = S_0. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

La figure 1.3 présente la solution optimale, c'est-à-dire les courbes des concentrations des substrats  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  définies dans 2 ainsi que le contrôle  $u$  en fonction du temps, pour les mêmes paramètres numériques utilisés par D.Mazouni dans ses expérimentations, pour  $\alpha = 1$  et pour  $s_3^0 = 20$ .

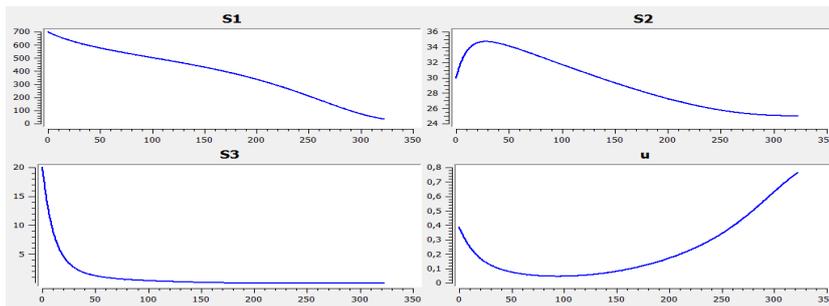
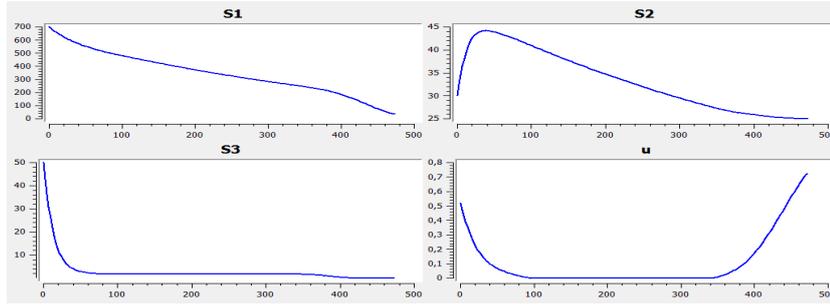


Figure 1.3: Solution de  $(P^1)$  calculée par *bocop* pour  $s_3^0 = 20$

On remarque que le contrôle optimal est singulier et n'est pas bang-bang. Ceci est important dans la mesure où on peut traiter les trois types de substrat en même temps. Ceux qui se dégradent en mode anaérobie et ceux


 Figure 1.4: Solution de  $(P^1)$  calculée par *bocop* pour  $s_3^0 = 50$ 

qui se dégradent en mode aérobie. De plus, on constate qu'il n'existe pas de jonction entre un arc bang et un arc singulier et inversement.

Dans la section suivante, on rappelle que  $(P^0)$  est le problème de contrôle en temps minimal défini au 2.

#### 4.2.1 Comparaison des coûts temps-énergie des deux problèmes $(P^\alpha)$ et $(P^0)$

On se propose de comparer la valeur de la fonction coût ainsi que le temps minimal et l'énergie des deux problèmes  $(P^\alpha)$  et  $(P^0)$ . On fixe  $s_3^0 = 50$ , on calcule et on compare pour différentes valeurs de  $\alpha$  comprises entre  $10^{-6}$  et 50 les quantités suivantes:

- $m^\alpha = \min_{u \in \mathcal{U}} \left( t^\alpha(u) + \alpha \int_0^{t^\alpha(u)} u^2(s) ds \right)$  où  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des contrôles admissibles pour le problème  $(P^\alpha)$ . Cette quantité est obtenue en résolvant le problème  $(P^\alpha)$ .
- $m_0^\alpha = t_{min} + \alpha \int_0^{t_{min}} u_{opt}^2(s) ds$  où  $t_{min}$  et  $u_{opt}(\cdot)$  sont respectivement le temps minimal et le contrôle optimal associés au problème  $(P^0)$ .

De plus, on compare les temps de réaction  $t_{min}$  et  $t^\alpha(u)$  d'une part et on compare aussi les énergies consommées  $E_{min} = \int_0^{t_{min}} u(s)_{opt}^2 ds$  et  $E^\alpha(u) = \int_0^{t^\alpha(u)} u(s)^2 ds$  d'autre part. Le tableau.1 (respectivement le tableau.2 récapitule les résultats trouvés pour  $\alpha = 10^{-6}, \dots, 1$  (respectivement  $\alpha = 2, \dots, 50$ ).

Le temps minimal pour atteindre la cible (solution du problème  $(P^0)$ ) est calculée par l'algorithme proposé par D.Mazouni dans [2], (on peut aussi le calculer directement via le logiciel *bocop*, les deux méthodes donnent la même trajectoire). Concernant le problème  $(P^\alpha)$ , le temps nécessaire pour que la trajectoire optimale atteigne la cible  $t^\alpha(u)$  est donné par:

$$t^\alpha(u) = \int_0^{m^\alpha} \frac{1}{1 + \alpha u^2(s)} ds,$$

où  $m^\alpha$  est la valeur minimale de la fonction coût du problème ( $P^\alpha$ ).

$\alpha$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1
$m^\alpha$	448.201	448.205	448.205	448.245	448.601	452.057	473.165
$m_0^\alpha$	448.3	448.3	448.3	448.4	448.8	452.7	491.6
$t^\alpha(u)$	448.200	448.204	448.200	448.204	448.230	448.598	457.425
$t_{min}$	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200
$E^\alpha(u)$	...	...	50	41	37.1	34.6	15.7
$E_{min}$	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293

Tableau 1. Valeurs pour  $\alpha = 10^{-6}, \dots, 1$

$\alpha$	2	5	10	20	30	40	50
$m^\alpha$	486.069	509.492	533.386	566.603	594.111	619.598	644.124
$m_0^\alpha$	534.9	664.8	881.3	1314.2	1747.1	2180.1	2613.0
$t^\alpha(u)$	464.963	479.652	493.8995	508.2133	515.539	520.038	523.094
$t_{min}$	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200
$E^\alpha(u)$	10.6	6	3.9	2.9	2.6	2.5	2.4000
$E_{min}$	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293

Tableau 2. Valeurs pour  $\alpha = 2, \dots, 50$

Dans la figure 1.6, on trace les courbes du coût optimal  $m^\alpha$  et du temps de réaction  $t^\alpha(u)$  en fonction de  $\alpha$ . On remarque que  $t^\alpha(u) > t_{min}$  pour tout  $\alpha > 0$ . De plus, la différence  $t^\alpha(u) - t_{min}$  augmente lorsque  $\alpha$  augmente (voir figure 1.6). Ceci montre que les trajectoires optimales pour le problème ( $P^\alpha$ ) ne sont plus des trajectoires optimales pour le problème de contrôle en temps minimal ( $P^0$ ). On perd alors du temps pour espérer minimiser l'énergie d'oxygène consommée pendant la réaction. Ceci est mis en évidence en comparant les courbes de  $E^\alpha(u)$  et  $E_{min}$  dans la figure 1.7.

Dans les tableaux 3. et 4., on présente pour chaque valeur de  $\alpha = 10^{-6}, \dots, 50$  utilisée dans le tableau précédent les pourcentages du temps perdu ainsi que les pourcentage de l'énergie d'oxygène gagnée.

$\alpha$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1
temps perdu	0	0.0009	0.0009	0.0009	0.0067	0.0888	2.0582
énergie gagnée	...	...	...	5	14	19.9	63.5

Tableau 3. Valeurs pour  $\alpha = 10^{-6}, \dots, 1$

$\alpha$	2	5	10	20	30	40	50
temps perdu	3.7401	7.0174	10.1962	13.3898	15.0243	16.0281	16.7100
énergie gagnée	75.5	86.2	90.9	93.2	93.9	94.2	94.4

Tableau 4. Valeurs pour  $\alpha = 2, \dots, 50$

Le gain en énergie dans le critère est plus important que la perte en temps de la réaction. De point de vue pratique: la stratégie bang-bang (celle développée par D.Mazouni) est optimale en temps. De plus, elle est plus facile à mettre en œuvre car elle nécessite de faire varier l'injection de l'oxygène entre deux concentrations extrémales à deux instants de commutation au maximum. En revanche, cette stratégie nécessite une quantité d'oxygène assez élevée. La stratégie, qui consiste à minimiser le compromis temps-énergie réduit la quantité d'oxygène nécessaire avec une perte de temps assez faible. Cette stratégie est plus difficile à mettre en œuvre, car nécessite la régulation de la quantité d'oxygène sur toute la durée de la réaction.

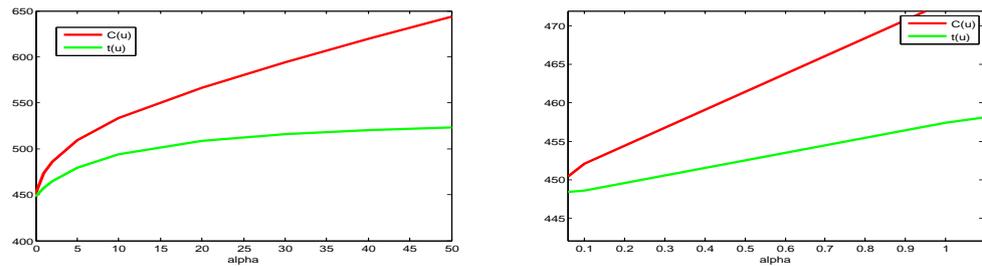


Figure 1.5: Les courbes de  $m^\alpha$  et du temps en fonction de  $\alpha$

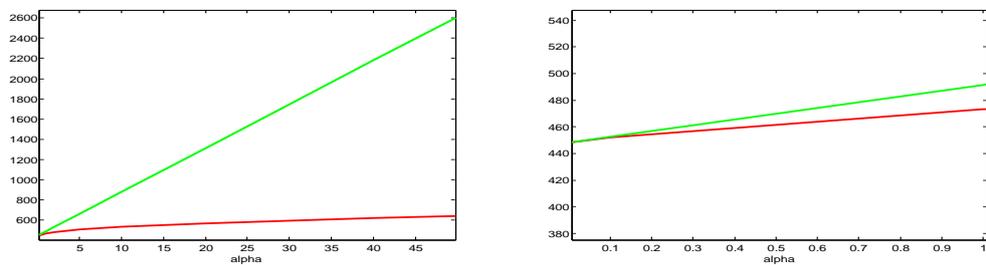


Figure 1.6: Les courbes de  $m^\alpha$  et du temps en fonction de  $\alpha$

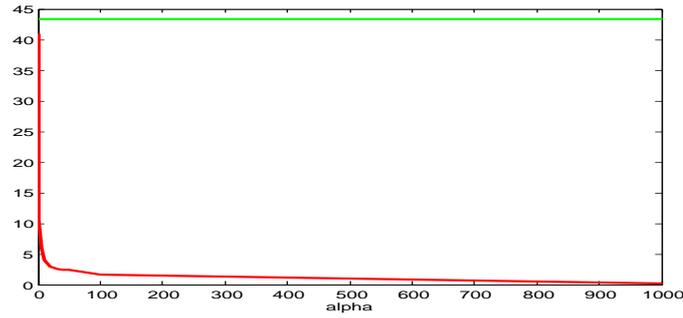


Figure 1.7:  $E^\alpha(u)$  et  $E_{min}$  en fonction de  $\alpha$ .

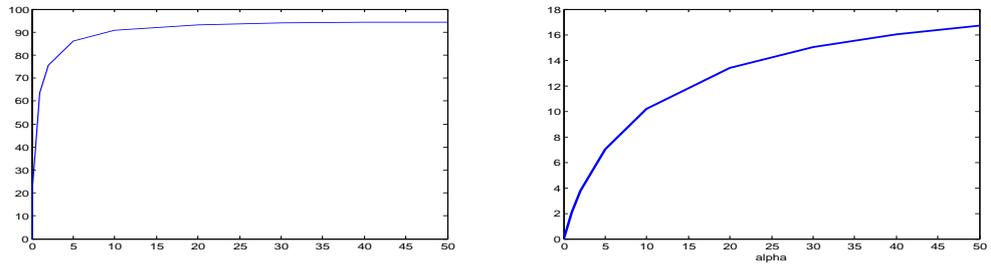


Figure 1.8: A gauche: Variation du pourcentage de gain en énergie en fonction de  $\alpha$ . A droite; Variation du pourcentage de la perte du temps en fonction de  $\alpha$

Il est clair qu'une petite valeur de  $\alpha$  (typiquement  $\alpha \approx 5$ ) suffit à gagner beaucoup en énergie sans perdre beaucoup en temps, il y a donc clairement des compromis meilleurs que les autres.

### 4.3 Cas où $J(u) = u$ : Problème du compromis entre le temps et la consommation d'oxygène

Dans cette section, on prend  $J(u) = u$  et on s'intéresse à la résolution d'un autre problème de contrôle optimal dont la fonction coût est un compromis entre la durée de la réaction biologique et la consommation d'oxygène pendant cette durée. Pour tout  $\alpha \geq 0$ , le nouveau problème est formulé comme suit:

$$(\mathcal{Q}^\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } t(u) + \alpha \int_0^{t(u)} u(s) ds, \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ S(0) = (s_1^0, s_2^0, s_3^0), \\ S \text{ solution de (2.2) et } S(t(u)) \in \mathcal{C}, \end{array} \right.$$

On commence par le résultat d'existence suivant:

**Proposition 4.3** *Pour tout  $\alpha \geq 0$ , le problème  $(\mathcal{Q}^\alpha)$  possède au moins une solution.*

**Preuve** On démontre ce résultat en appliquant un théorème de Filippov (voir par exemple [[7], théorème 6.2.1]). Soit  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles pour le problème  $(\mathcal{Q}^\alpha)$ , cet ensemble est non vide (il contient au moins la trajectoire trouvée par D. Mazouni [1]). On considère aussi  $u \in U$  une fonction mesurable à valeurs dans  $[0,1]$ . Remarquons d'abord que, comme  $(0, 0, 0)$  et  $(m_1, m_2, m_2)$  sont deux points d'équilibre pour le système (2.2) alors pour toute trajectoire  $S(\cdot)$  issue de  $S^0 \in ]0, m_1[ \times ]0, m_2[ \times ]0, m_2[$  vérifie  $S(t) \in ]0, m_1[ \times ]0, m_2[ \times ]0, m_2[$  pour tout  $t \in [0, t(u)]$  et est donc uniformément bornée. D'autre part, pour tout  $X \in \mathbb{R}^3$ , l'ensemble des vecteurs vitesse augmentés:

$$V(X) = \{(1 + \alpha u, F(X) + uG(X)), u \in [0, 1]\}$$

est convexe et compact. Ainsi, les hypothèses du théorème de Filippov sont satisfaites et il existe un contrôle optimal  $u$  tel que la trajectoire associée à ce contrôle  $S(\cdot)$  joint  $S(0)$  à la cible  $\mathcal{C}$  en un coût minimal.  $\square$

On se propose maintenant de résoudre le problème  $(\mathcal{Q}^\alpha)$  en utilisant les méthodes directes via le logiciel bocop. Le but de ces simulations est d'essayer de détecter la structure du contrôle optimal et de comparer la consommation en oxygène donnée en résolvant le problème  $(\mathcal{Q}^\alpha)$  et la consommation donnée en utilisant la stratégie du temps minimal. Ces comparaisons donnent aux biologistes la possibilité de choisir la stratégie convenable suivant le critère que l'on cherche à minimiser. On fixe  $s_3^0 = 50$ , on calcule et on compare pour différentes valeurs de  $\alpha$  comprises entre 1 et 50 les quantités suivantes:

$$mc^\alpha = \min_{u \in \mathcal{U}} \left( t^\alpha(u) + \alpha \int_0^{t^\alpha(u)} u(s) ds \right) \text{ où } \mathcal{U} \text{ est l'ensemble des contrôles admissibles pour le problème } (\mathcal{Q}^\alpha). \text{ Cette quantité est obtenue en résolvant le problème } (\mathcal{Q}^\alpha). mc_0^\alpha = t_{min} + \alpha \int_0^{t_{min}} u_{opt}(s) ds \text{ où } t_{min} \text{ et } u_{opt}(\cdot) \text{ sont associés au problème } (\mathcal{P}^0).$$

De plus, on compare

- les temps de réaction  $t_{min}$  et  $t^\alpha(u)$ ;
- les énergies consommées  $C_{min} = \int_0^{t_{min}} u_{opt}(s) ds$  et  $C^\alpha(u) = \int_0^{t^\alpha(u)} u(s) ds$ ;

Les résultats trouvés sont présentés dans le tableau 5.:

$\alpha$	0.5	1	2	5	10	30	50
$mc^\alpha$	468.989	489.764	531.218	654.998	855.60	1244.2	1461
$m_0^\alpha$	469	489.7	531	655	861.7	1688.4	2515.1
$t^\alpha(u)$	448.587	448.811	449.117	450.399	516.052	870.509	972.779
$t_{min}$	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200	448.200
$C^\alpha(u)$	40.803	40.952	41.05	40.919	33.955	12.456	9.764
$C_{min}$	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293	43.293

Tableau 5. Valeurs pour  $\alpha = 0.5, \dots, 50$

$\alpha$	0.5	1	2	5	10	30	50
temps	0.131	0.181	0.249	0.535	15.190	94.310	117.138
consommation	5.335	5.716	5.773	5.801	27.501	247.567	343.394

Tableau 6. Pourcentage de gain en consommation et pourcentage de perte en temps  $\alpha = 0.5, \dots, 50$

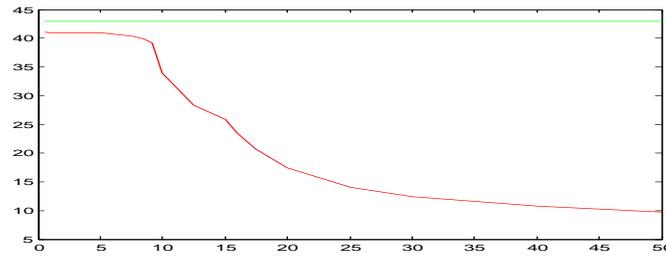


Figure 1.9:  $C^\alpha(u)$  et  $C_{min}$  en fonction de  $\alpha$ .

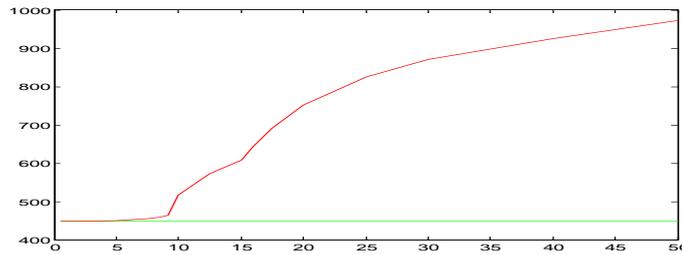


Figure 1.10:  $t^\alpha(u)$  et  $t_{min}$  en fonction de  $\alpha$ .

Dans la figure 1.9, on trace la courbe de la consommation en fonction de  $\alpha$ , calculée par les deux stratégies (en vert, celle qui correspond à la minimisation du temps de réaction et en rouge celle qui correspond à la minimisation du compromis temps consommation). Pour  $\alpha \leq 9$ , la consommation varie peu mais elle diminue significativement quand  $\alpha$  prend des valeurs plus grandes. A partir de la valeur  $\alpha = 40$ , la consommation diminue légèrement.

Dans la figure 1.10, on trace la courbe du temps en fonction de  $\alpha$ , calculée par les deux stratégies (en vert, celle qui correspond à la minimisation du temps de réaction et en rouge celle qui correspond à la minimisation du compromis temps consommation). Le temps nécessaire à la réaction est minimal jusqu'à  $\alpha = 9$  et commence à augmenter significativement au delà de cette valeur. Quand  $\alpha$  est petit, le minimum  $mc^\alpha$  est atteint pour une valeur proche du temps minimal, alors que pour  $\alpha$  grand, c'est la consommation de l'oxygène qui est privilégiée donc diminue considérablement, contrairement au temps nécessaire à la réaction qui augmente, comme le montre la figure 1.11.

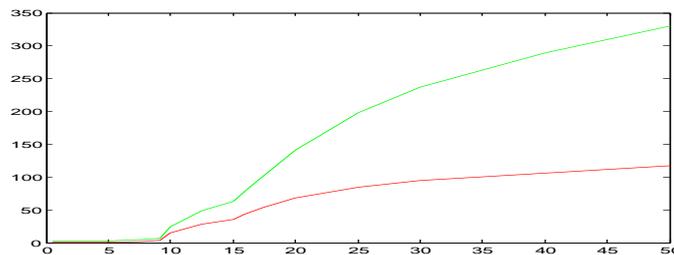


Figure 1.11: Le pourcentage de gain en consommation d'oxygène (en vert) et de perte en temps (en rouge).

Pour  $\alpha$  grand, on voit que la perte, en pourcentage du temps (en rouge) est inférieure au gain de l'oxygène consommé (en vert). Le temps de la réaction est assez grand par rapport au temps minimal nécessaire. Comme pour le cas  $J = u^2$ , on voit que les stratégies associées à des compromis avec un  $\alpha$  intermédiaire (entre 10 et 15) permettent des gains substantiels en consommation sans perdre trop de temps. En revanche les petites valeurs de  $\alpha$  ( $< 9$ ) n'ont aucun intérêt par rapport au temps minimal.

D'un autre côté, les simulations montrent que pour les valeurs initiales considérées, le contrôle optimal solution du problème ( $Q^\alpha$ ) est bang-bang avec deux commutations au plus. Surtout, il existe  $\alpha^* > 0$  tel que si  $\alpha \leq \alpha^*$ , il faut deux commutations pour atteindre la cible en coût minimal et si  $\alpha > \alpha^*$  il faut une seule commutation. Pour les conditions initiales que nous avons étudiées, cette valeur de  $\alpha$  se situe entre 10 et 40, ce qui correspond, comme nous l'avons relevé précédemment, à un type de compromis intéressant.

Les figures 1.12 et 1.13 illustrent ce phénomène pour  $\alpha = 1$  et pour  $\alpha = 50$ . Pour le problème du temps minimal, la structure du contrôle optimal est bang bang. En ajoutant le terme de consommation, on remarque que la structure reste bang-bang. En particulier, pour  $\alpha$  assez grand le contrôle optimal change de valeur une seule fois. Il prend initialement la valeur 1 puis il prend la valeur 0 jusqu'à la fin de la réaction. Cette stratégie consiste donc à diminuer grâce à une aération maximale les concentrations de  $s_1$  et  $s_3$  jusqu'à l'instant de commutation. Ensuite, on continue la réaction par la suspension totale d'injection d'oxygène dans le réacteur, ceci est utile à la minimisation de la consommation en oxygène. Il nous reste à étudier la

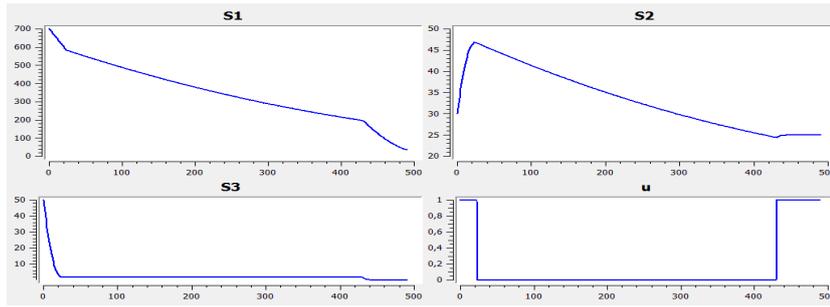


Figure 1.12: Une solution calculée par *bocop* pour  $\alpha = 1$

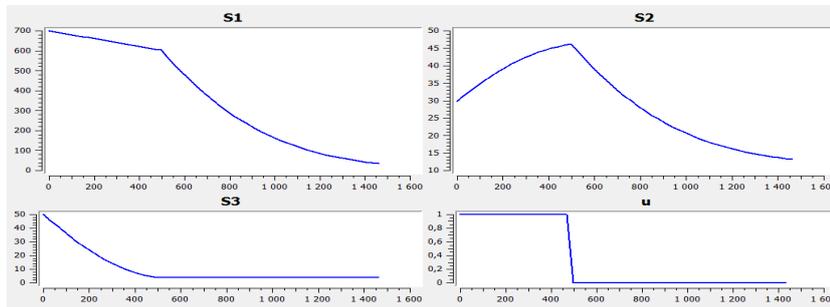


Figure 1.13: Une solution calculée par *bocop* pour  $\alpha = 50$

dépendance de  $\alpha^*$  par rapport aux conditions initiales, ce que nous n'avons pas eu le temps de mener à bien. Si, comme les premiers tests numériques le laissent supposer, cette valeur reste proche de 10-15, les stratégies associées auraient le gros avantage d'être plus simples que celles en temps minimal (un seul changement de valeur du contrôle) tout en baissant significativement la consommation sans trop de perte de temps.

## 5 Conclusion

Ce chapitre a été essentiellement consacré à l'étude numérique de quelques problèmes de contrôle optimal. D'abord, on a résolu un problème de contrôle optimal en temps minimal par les méthodes directes en utilisant le logiciel *bocop*. On a trouvé les mêmes résultats trouvés par D.Mazouni (voir [1]). Ensuite, on a résolu numériquement un autre problème de contrôle optimal dont la fonction coût est un compromis entre le temps et l'énergie. Plusieurs tests ont été faits afin de montrer l'intérêt de considérer une telle fonction coût. Enfin, on a modifié la fonction coût qui réalise le compromis entre le temps et la consommation d'oxygène.

## Chapter 2

# Une approche géométrique pour la résolution d'un problème de contrôle optimal

### 1 Introduction

Le problème posé dans le chapitre précédent nécessite de considérer un modèle en 3 dimensions, modèle pour lequel le problème de commande est très difficile à résoudre directement. C'est la raison pour laquelle on se propose d'étudier dans un premier temps un problème légèrement différent où n'apparaît pas explicitement de couplage entre les substrats alors que c'était le cas dans le travail de D. Mazouni. Plus spécifiquement, nous nous intéressons à un modèle dans lequel la concentration en oxygène est la variable de contrôle et où deux réactions biologiques - pouvant avoir lieu simultanément - sont nécessaires pour traiter deux types de substrats distincts. Les deux biomasses microbiennes en jeu sont respectivement limitées et inhibées par leur substrat respectif, l'une étant favorisée par l'oxygène (réaction aérobie) alors que la seconde est inhibée (réaction anoxique). Sur le plan pratique, on simplifie donc le cas considéré par D. Mazouni au sens où les processus de nitrification et de dénitrification sont bien contrôlés par l'oxygène mais où la contrainte sur la matière organique nécessaire à la dénitrification est ignorée. Cette simplification nous permet de traiter ce cas dans deux dimensions et de résoudre le problème de contrôle optimal en temps et en énergie. Les résultats de cette première étude nous aideront à aborder le problème en trois dimensions où les variables sont couplées par un substrat supplémentaire (le carbone).

Le problème en deux dimensions se traduit mathématiquement par un problème de contrôle optimal où la dynamique est un système différentiel bidimensionnel dont les variables d'état sont découplées. Ce système modélise la variation des concentrations de deux substances nuisibles. Le but est de trouver une stratégie de commande optimale qui permet d'atteindre une cible fixée en minimisant une fonction coût qui s'exprime sous forme

d'une intégrale d'une fonction positive sur un intervalle de temps qui permet d'atteindre la cible.

Ce problème a été traité dans [5, 6] avec des systèmes dynamiques assez particuliers, où on impose des hypothèses sur les fonctions de croissance (convexité, les valeurs des dérivées au bord, etc ...). Généralement, ces hypothèses rendent le modèle non réaliste. Pour cette raison, nous proposons de diminuer les conditions sur le système dynamique pour qu'il soit plus réaliste de point de vue biologique.

La technique utilisée dans ce travail consiste à formuler les problèmes de contrôle optimal traité sous forme de problèmes d'optimisation géométriques dans le plan. La résolution de ces problèmes géométriques nous a permis d'affaiblir les hypothèses sur les fonctions de croissance de la dynamique considérée ainsi que sur les fonctions coûts et de résoudre les problèmes considérés.

## 2 Problème de contrôle en temps minimal

Nous commençons par présenter le problème de contrôle optimal auquel on s'intéresse.

### 2.1 Modèle

On considère le système dynamique suivant:

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -f_1(u)\rho_1(s_1), \\ \dot{s}_2 = -f_2(u)\rho_2(s_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux fonctions strictement positives sur  $]0, +\infty[$  et nulles en 0,  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions continues sur  $[0, 1]$ .

On considère la cible à atteindre définie par:  $\mathcal{C}_0 = [0, a] \times [0, b]$  où  $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$ . De même, on définit le coût donné par  $\int_0^{t(u)} (1 + J(u)) ds$  où  $J$  est une fonction positive et continue sur  $[0, 1]$  et modélise un coût d'énergie. Pour une condition initiale  $s^0 \in ]0, +\infty[^2$  donnée, on s'intéresse au problème de contrôle optimal dans  $\mathbb{R}^2$  défini par:

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} \text{Minimiser } C(u) = \int_0^{t(u)} (1 + J(u(\tau))) d\tau, \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ s \text{ solution de (2.1) } s(0) = s^0 \text{ et } s(t(u)) \in \mathcal{C}_0, \end{cases}$$

Le problème  $(\mathcal{P}_0)$  n'étant pas convexe, c'est à dire que l'ensemble des vecteurs vitesses augmentés n'est pas convexe. Nous dérivons un problème

convexifié équivalent et nous démontrons l'existence d'une solution que nous expliciterons dans les divers cas considérés. Dans la suite, on écrit le problème  $(\mathcal{P}_0)$  sous forme d'un problème de contrôle optimal en temps minimal qu'on notera  $(\mathcal{P})$ . Pour résoudre ce problème, on va utiliser une technique qui consiste à convexifier l'ensemble

$$\{(F_1(u), F_2(u)); \quad u \in [0, 1]\},$$

où  $F_i(u) = \frac{f_i(u)}{1+J(u)}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . On définit alors un problème de contrôle en temps minimal dont la dynamique est associée à un ensemble convexe c'est à dire que la dynamique est de la forme  $\dot{v} \in V$  avec  $V$  est un ensemble convexe et on montre que les deux problèmes sont équivalents. Pour cela, on définit la cible  $\mathcal{C}_{\bar{S}}$  par :

$$\mathcal{C}_{\bar{S}} = \{(S_1, S_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } S_1 \geq \bar{S}_1 \text{ et } S_2 \geq \bar{S}_2\},$$

avec  $\bar{S}_1 = \int_a^{s_1^0} \frac{ds}{\rho_1(s)}$ ,  $\bar{S}_2 = \int_b^{s_2^0} \frac{ds}{\rho_2(s)}$  et  $\bar{S} = (\bar{S}_1, \bar{S}_2)$ . Soit le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = F_1(u), \\ \dot{S}_2 = F_2(u). \end{cases} \quad (2.2)$$

Soit le problème de contrôle optimal en temps minimal  $(\mathcal{P})$  donné par:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } t(u), \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ S \text{ solution de (2.2) } S(0) = 0 \text{ et } S(t(u)) \in \mathcal{C}_{\bar{S}}. \end{cases}$$

On a alors:

**Proposition 2.1** *Le problème  $(\mathcal{P}_0)$  est équivalent au problème  $(\mathcal{P})$  au sens où ils prennent la même valeur du minimum et admettent les mêmes solutions  $u(\cdot)$ .*

**Preuve** Dans le but de ramener le problème  $(\mathcal{P}_0)$  à un problème de contrôle en temps minimal, on pose:

$$S_1(t) = \int_0^t -\frac{\dot{s}_1}{\rho_1(s_1)} = \int_{s_1(t)}^{s_1^0} \frac{ds}{\rho_1(s)} \quad \text{et} \quad S_2(t) = \int_0^t -\frac{\dot{s}_2}{\rho_2(s_2)} = \int_{s_2(t)}^{s_2^0} \frac{ds}{\rho_2(s)}.$$

Etant donné un contrôle  $u(\cdot)$ , on définit  $z(\cdot)$  une reparamétrisation du temps par  $\dot{z}(t) = 1 + J(u(z(t)))$ ,  $z(0) = 0$  pour tout  $t \in [0, t(u)]$ . On a pour  $i \in \{1, 2\}$ :

$$\frac{dS_i(z(t))}{dt} = \frac{dS_i(z(t))}{dz} \cdot \frac{dz(t)}{dt} = f_i(u(z(t))), \quad (2.3)$$

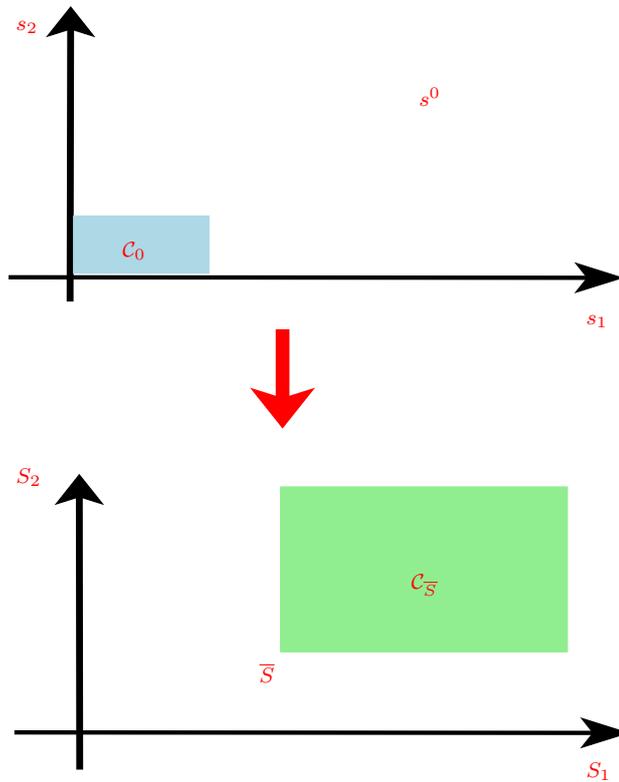


Figure 2.1: Passage de  $(\mathcal{P}_0)$  à  $(\mathcal{P})$

ce qui est équivalent à:

$$\frac{dS_i(z(t))}{dz} = \frac{f_i(u(z(t)))}{1 + J(u(z(t)))} = F_i(u), \quad (2.4)$$

et  $\int_0^t (1 + J(u(s))) ds = z(t)$ . Donc le problème  $(\mathcal{P}_0)$  s'exprime sous forme d'un problème de contrôle en temps minimal avec la dynamique (??). D'où le résultat.  $\square$

## 2.2 Problème convexifié

Nous résolvons, dans ce paragraphe, un problème de contrôle en temps minimal associé à la dynamique  $\dot{S} = v$ ,  $v \in V$ , où  $V$  est un convexe donné. Dans la section 2.3, on prendra

$$V = \text{conv}\{(F_1(u), F_2(u)); \quad u \in [0, 1]\}.$$

### 2.2.1 Formulation du problème

Soit  $V$  un convexe compact de  $\mathbb{R}_+^2$  qui vérifie  $V \cap (\mathbb{R}_+^*)^2 \neq \emptyset$ . On se donne la cible  $C_{\bar{s}}$  et on considère la dynamique:

$$\dot{S} = v; \quad v \in V. \quad (2.5)$$

On définit donc le problème de contrôle en temps minimal par:

$$(\mathcal{P}_{co}) \begin{cases} \text{Minimiser } t(v), \\ v(\cdot) \in L^\infty([0, t(v)], V), \\ S \text{ solution de (2.5), } S(0) = 0 \text{ et } S(t(v)) \in \mathcal{C}_{\bar{S}}. \end{cases}$$

**Remarque** L'ensemble atteignable à partir de l'origine de la dynamique (2.4) est le cône  $\mathbb{R}_+V$ .

**Proposition 2.2** *Pour tout  $\bar{S} \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  le problème  $(\mathcal{P}_{co})$  admet au moins une solution.*

**Preuve** On démontre ce résultat en appliquant un théorème de Filippov (voir par exemple [7, théorème 6.2.1]). Remarquons d'abord que, le cône  $\mathbb{R}_+V$  intersecte la cible  $\mathcal{C}_{\bar{S}}$  pour tout  $\bar{S} \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , donc elle est atteignable par la dynamique (2.5) à partir de 0. D'autre part, l'ensemble  $V$  est convexe compact. Ainsi les hypothèses du théorème sont satisfaites et il existe un contrôle  $v$  tel que la trajectoire  $S(\cdot)$  associée à  $v$  joint 0 à la cible  $\mathcal{C}_{\bar{S}}$  en temps minimal.  $\square$

Après avoir montré l'existence d'une solution pour le problème  $(\mathcal{P}_{co})$ , on va appliquer le principe du maximum de Pontryagin, pour calculer la ou les solutions de  $(\mathcal{P}_{co})$ .

### 2.2.2 Application du Principe du maximum de Pontryagin (PMP)

Appliquons le principe du maximum de Pontryagin au problème  $(\mathcal{P}_{co})$ , [9]. Si le contrôle  $v$  associé à la trajectoire  $S(\cdot)$  est optimal sur  $[0, t(v)]$  pour le problème  $(\mathcal{P}_{co})$ , alors il existe un vecteur  $p \in \mathbb{R}^2$  appelé vecteur adjoint, et un réel  $\lambda^0 \geq 0$  tels que:

- le couple  $(p, \lambda^0)$  est non trivial;
- on a la condition de maximisation: pour presque tout  $t \in [0, t(v)]$ ,

$$H(S(t), p, \lambda^0, v(t)) = \max_{u \in V} H(S(t), p, \lambda^0, u), \quad (2.6)$$

où  $H(S, p, \lambda^0, u) = p^T u - \lambda^0$  est le hamiltonien du système;

- le hamiltonien est identiquement nul, i.e.

$$H(S(t), p, \lambda^0, v(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, t(v)], \quad (2.7)$$

En effet, le système (2.5) est autonome et le temps final pour joindre la cible  $\mathcal{C}_{\bar{S}}$  n'est pas fixé;

- la condition de transversalité suivante est satisfaite;

$$\langle p, z - S(t(v)) \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \mathcal{C}_{\bar{S}}. \quad (2.8)$$

Notons que  $p$  est constant car  $H$  ne dépend pas de l'état. De plus, l'équation (2.8) implique en particulier que  $p \in (\mathbb{R}_+)^2$ .

**Lemme 2.3** *Il n'existe pas d'extrémales anormales pour le problème  $(\mathcal{P}_{co})$ , c'est à dire que  $\lambda^0 > 0$ .*

**Preuve** Supposons que  $\lambda^0 = 0$ , on a alors  $p \neq 0$  et  $p^T v(t) \equiv 0$  d'après (2.7) ce qui est équivalent à  $p$  et  $v$  sont orthogonaux. Or, d'après la condition de transversalité (2.8), le vecteur adjoint doit appartenir à  $(\mathbb{R}_+)^2$ , on en déduit donc que  $v(t)$  est soit horizontal pour tout  $t \in [0, t(v)]$ , soit vertical pour tout  $t \in [0, t(v)]$ . Dans ces deux cas, la trajectoire donnée par  $\dot{S} = v$  et issue de  $S(0) = 0$  est incluse dans l'un des axes  $\{S_1 = 0\}$  ou  $\{S_2 = 0\}$  et donc n'atteint pas la cible.  $\square$

### 2.2.3 Analyse des équations du PMP

Soit  $S(\cdot)$  une trajectoire optimale et  $p$  un vecteur adjoint associé à  $S(\cdot)$ . D'après le lemme 2.3 on a  $\lambda^0 > 0$ , ce qui implique que  $p \neq 0$ . Quitte à multiplier  $(p, \lambda^0)$  par  $1/\|p\|$  et du fait que le hamiltonien  $H$  est linéaire en  $(p, \lambda^0)$ , on peut supposer que  $\|p\| = 1$ . Comme  $p \in (\mathbb{R}_+)^2$ , on supposera donc que  $p$  appartient au quart du cercle unité  $S^{1+} = S^1 \cap (\mathbb{R}_+)^2$ . De plus, d'après (2.6),  $p$  vérifie:

$$v(t) \in \partial V_p = \operatorname{argmax}_{v \in V} p^T v, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, t(v)]. \quad (2.9)$$

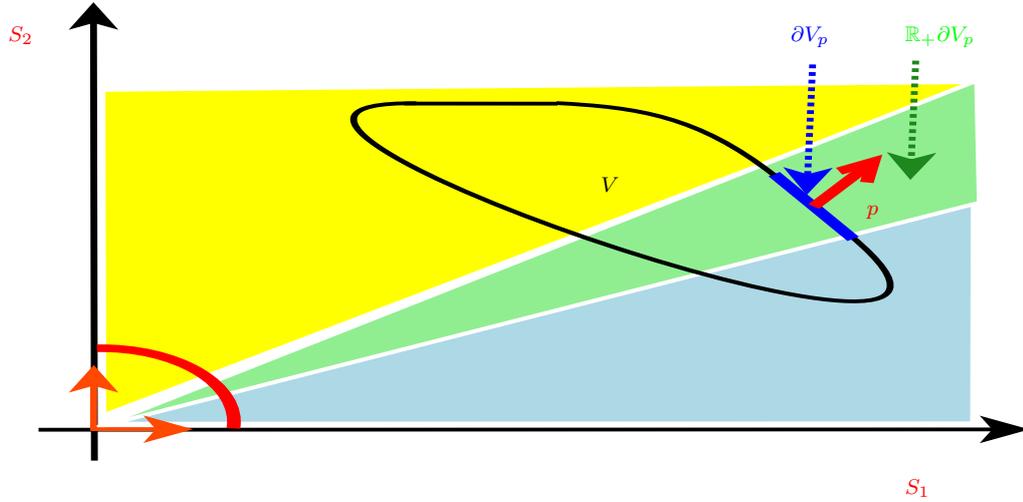
Géométriquement,  $\partial V_p$  est le sous ensemble des points de  $V$  qui ont la plus grande coordonnée en  $p$  dans la base  $(p, p^\perp)$ . Autrement dit,  $\partial V_p$  est la partie de la frontière de  $V$  dont la normale sortante est  $p$ . Si  $\partial V_p$  est non réduit à un singleton et puisque  $V$  est convexe, alors  $\partial V_p$  doit être un segment. (Voir figure 2.2)

Notons que, dans le cas où  $p = e_1$  (respectivement  $p = e_2$ ), alors  $\partial V_{e_1}$  (respectivement  $\partial V_{e_2}$ ) est le sous-ensemble des points de  $V$  dont l'abscisse (respectivement l'ordonnée) est maximale.

Soit  $v_1^{max} = \max\{v_1; (v_1, v_2) \in V\}$  i.e.  $\partial V_{e_1} = \{(v_1^{max}, v_2); v \in V\}$  et  $v_2^{max} = \max\{v_2; (v_1, v_2) \in V\}$  i.e.  $\partial V_{e_2} = \{(v_1, v_2^{max}); v \in V\}$ .

**Définition** On dit que le point  $\bar{S}$  est au dessus (respectivement en dessous) du cône  $\mathbb{R}_+ \partial V_p$  si  $\bar{S} \in \mathbb{R}_+ \partial V_p$  ou si le point  $\bar{S}$  est compris entre le cône  $\mathbb{R}_+ \partial V_p$  et l'axe vertical  $(OS_2)$  (respectivement l'axe  $(OS_1)$ ).

Le point final  $S(t(v))$  d'une trajectoire optimale est forcément sur le bord de la cible d'après (2.8). On distingue deux cas, selon que  $S(t(v))$  est sur le coin ou non. Etudions d'abord le deuxième cas.


 Figure 2.2: Les ensembles  $V$ ,  $\partial V_p$  et  $\mathbb{R}_+ \partial V_p$ 

**Lemme 2.4** Soit  $S(\cdot)$  une solution optimale du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  telle que  $S(t(v)) \neq \bar{S}$  et soit  $v(\cdot)$  le contrôle associé.

- (i) Si  $S(t(v)) \in \{S_1 > \bar{S}_1\} \times \{S_2 = \bar{S}_2\}$ , alors  $t(v) = \frac{\bar{S}_2}{v_2^{max}}$  et  $v(t) \in \partial V_{e_2}$  pour presque tout  $t \in [0, t(v)]$ . De plus, le point  $\bar{S}$  est au dessus du cône  $\mathbb{R}_+ \partial V_{e_2}$ .
- (ii) Si  $S(t(v)) \in \{S_1 = \bar{S}_1\} \times \{S_2 > \bar{S}_2\}$ , alors  $t(v) = \frac{\bar{S}_1}{v_1^{max}}$  et  $v(t) \in \partial V_{e_1}$  pour presque tout  $t \in [0, t(v)]$ . De plus, le point  $\bar{S}$  est en dessous du cône  $\mathbb{R}_+ \partial V_{e_1}$ .

**Preuve** Soit  $S(\cdot)$  une trajectoire optimale qui touche la cible en un point de la demi-droite ouverte  $\{S_1 > \bar{S}_1\} \times \{S_2 = \bar{S}_2\}$  (cas (i)) et  $p$  un vecteur adjoint associé à  $S(\cdot)$ . Alors la condition de transversalité et le fait que  $\|p\| = 1$  impliquent que  $p = e_2 = (0, 1)$ . On a alors  $v(t) \in \partial V_{e_2}$  p.p. et donc  $v_2(t) = v_2^{max}$  p.p., d'après la condition de maximisation (??). Dans ce cas, la trajectoire  $S(\cdot)$  vérifie:

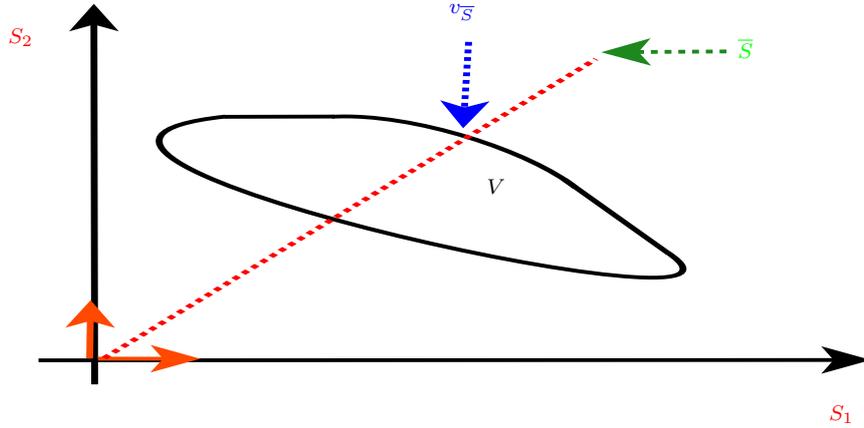
$$\dot{S}(t) = (v_1(t), v_2^{max}) \in \partial V_{e_2}. \quad (2.10)$$

En intégrant l'équation (2.10) entre 0 et  $t(v)$  et en tenant compte du fait que  $S(t(v)) = \bar{S}_2$ , on obtient :  $S_2(t(v)) = v_2^{max} t(v) = \bar{S}_2$ , ce qui est équivalent à  $t(v) = \frac{\bar{S}_2}{v_2^{max}}$ . De plus,  $S(t(v)) \in \mathbb{R}_+ \partial V_{e_2}$ , ce qui implique que  $\bar{S}$  est au dessus du cône  $\mathbb{R}_+ \partial V_{e_2}$ . On montre le deuxième point du lemme de la même manière que précédemment.  $\square$

On définit le point  $v_{\bar{S}}$ , par:

$$v_{\bar{S}} = \operatorname{argmax}_{v \in V \cap (O\bar{S})} \|v\|,$$

où  $(O\bar{S})$  est la droite passant par l'origine et le point  $\bar{S}$ .


 Figure 2.3: Détermination géométrique du point  $v_{\bar{S}}$ .

**Lemme 2.5** Soit  $(S(\cdot), v(\cdot))$  une trajectoire optimale du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  telle que  $S(t(v)) = \bar{S}$ . Alors  $t(v) = \frac{\|\bar{S}\|}{\|v_{\bar{S}}\|}$  et on a l'alternative suivante:

- Si  $\partial V$  est un segment au voisinage de  $v_{\bar{S}}$ , alors  $v(t) \in \partial V_p$  pour presque tout  $t \in [0, t(v)]$ , où  $p$  est l'unique vecteur de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $v_{\bar{S}}$  appartient à l'intérieur du segment  $\partial V_p$ .
- Sinon,  $v(\cdot) \equiv v_{\bar{S}}$ .

Dans les deux cas, il existe  $p \in S^{1+}$  tel que  $\bar{S} \in \mathbb{R}_+ \partial V_p$ .

**Preuve** Soit  $(S(\cdot), v(\cdot))$  une trajectoire optimale du problème  $(\mathcal{P}_{co})$ . Alors il existe  $p \in S^{1+}$  tel que  $v(t) \in \partial V_p$  pour presque tout  $t \in [0, t(v)]$ , ce qui implique que  $\bar{S} \in \mathbb{R}_+ \partial V_p$ . Ainsi  $v_{\bar{S}} \in \partial V_p$ , ce qui implique que  $p$  appartient au cône normal unitaire à  $V$  en  $v_{\bar{S}}$  défini par:

$$\mathcal{N}_V(v_{\bar{S}}) = \{p \in S^{1+}; \quad \langle p, v - v_{\bar{S}} \rangle \leq 0 \quad \forall v \in V\}. \quad (2.11)$$

Si  $\partial V$  est lisse en  $v_{\bar{S}}$ , alors  $\mathcal{N}_V(v_{\bar{S}})$  est un singleton, i.e.  $\mathcal{N}_V(v_{\bar{S}}) = \{p^0\}$ . On a alors:  $p_1^0 \bar{S}_1 + p_2^0 \bar{S}_2 = \int_0^{t(v)} p^{0T} v(s) ds = t(v) \lambda^0$ . Puisque  $\lambda^0 \neq 0$ , on déduit que  $t(v) = \frac{p_1^0 \bar{S}_1 + p_2^0 \bar{S}_2}{\lambda^0}$ . Comme  $p$  est unique, on conclut que  $t(v)$  ne dépend pas du contrôle  $v$  et toutes les trajectoires optimales qui atteignent le point  $\bar{S}$  ont le même temps d'atteinte. En particulier, on a :  $\bar{S}_1 = v_{1\bar{S}} t(v)$  et  $\bar{S}_2 = v_{2\bar{S}} t(v)$  avec  $v_{\bar{S}} = (v_{1\bar{S}}, v_{2\bar{S}})$ , ce qui implique que :  $t(v) = \frac{\|\bar{S}\|}{\|v_{\bar{S}}\|}$ .

Deux cas se présentent: soit  $\partial V_p$  est un segment qui contient dans son intérieur le point  $v_{\bar{S}}$ , et on a alors  $v(t) \in \partial V_p$  pour presque tout  $t \in [0, t(v)]$ ; soit  $\partial V_p$  est réduit au singleton  $\{v_{\bar{S}}\}$  et dans ce cas on a  $v(\cdot) \equiv v_{\bar{S}}$ .

Si  $\partial V$  n'est pas lisse en  $v_{\bar{S}}$ , alors il existe  $\theta_0 \in [0, \pi/2]$  et  $\theta_1 \in [0, \pi/2]$  tels que le cône normal à  $V$  en  $v_{\bar{S}}$  s'écrit

$$\mathcal{N}_V(v_{\bar{S}}) = \{e^{i\theta}; \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1]\}. \quad (2.12)$$

Si  $p \in \{e^{i\theta}; \theta \in ]\theta_0, \theta_1[ \}$ , alors  $\partial V_p = \{v_{\bar{S}}\}$  et donc  $v(\cdot) \equiv v_{\bar{S}}$ . De plus, le temps nécessaire pour atteindre la cible avec le contrôle constant  $v_{\bar{S}}$  est égal à  $t(v) = \frac{\|\bar{S}\|}{\|v_{\bar{S}}\|}$ .

Si  $p = e^{i\theta_0}$ , alors deux cas se présentent: soit  $\partial V_{e^{i\theta_0}} = \{v_{\bar{S}}\}$  et dans ce cas,  $v(\cdot) \equiv v_{\bar{S}}$ ; soit  $\partial V_{e^{i\theta_0}}$  est un segment, dans ce cas,  $v_{\bar{S}}$  est une extrémité du segment et  $v(\cdot) = v_{\bar{S}}$  est le seul contrôle à valeurs dans  $\partial V_{e^{i\theta_0}}$  qui permet d'avoir  $S(t(v)) = \bar{S}$ . On a alors de la même façon que précédemment  $v(\cdot) = v_{\bar{S}}$  et on montre que  $t(v) = \frac{\|\bar{S}\|}{\|v_{\bar{S}}\|}$ .

Le cas où  $p = e^{i\theta_1}$  se traite de la même manière. □

### 2.2.4 Synthèse optimale

**Définition** On répartit  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  en trois domaines  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  disjoints:

- $Z_1$  est la région de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  délimitée par l'axe des ordonnées et le cône  $\mathbb{R}_+ \partial V_{e_2}$  (inclus).
- $Z_3$  est la région de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  délimitée par l'axe des abscisses et le cône  $\mathbb{R}_+ \partial V_{e_1}$  (inclus).
- $Z_2$  est la région de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  définie par:  $Z_2 = (\mathbb{R}_+^*)^2 - (Z_1 \cup Z_3)$ , c'est à dire:

$$Z_2 = \bigcup_{p \in S^{1+}} \mathbb{R}_+ \partial V_p.$$

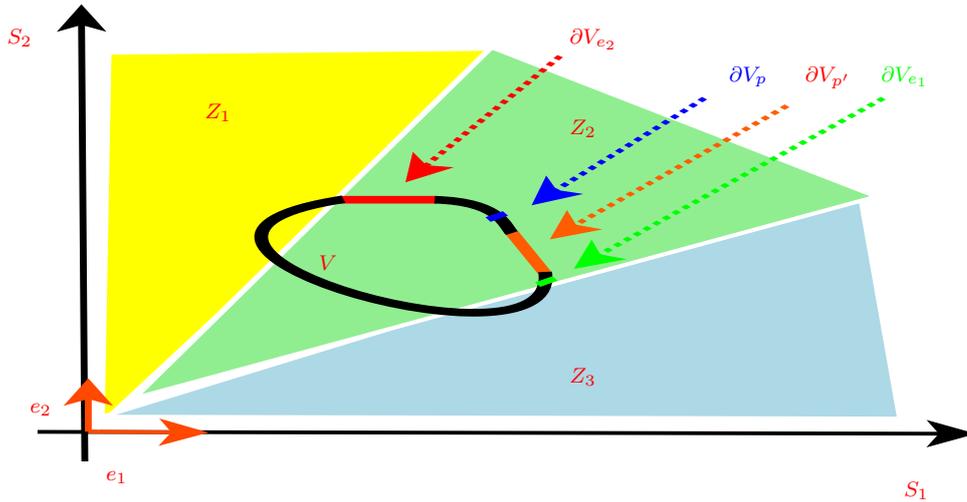


Figure 2.4: La partition de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  en trois zones  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ .

La figure 3.4 montre la partition du quart du plan positif en les trois zones  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ .

**Théorème 2.6**

- Si  $\bar{S} \in Z_1$ , alors le temps minimal est  $t(v) = \frac{\bar{S}_2}{v_2^{max}}$  et les minimisantes du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  sont les solutions de  $\dot{S} = v$ ,  $v \in \partial V_{e_2}$  et  $S(0) = 0$ , qui atteignent la cible  $\mathcal{C}_{\bar{S}}$  sur la demi-droite  $\{S_1 > \bar{S}_1\} \times \{S_2 = \bar{S}_2\}$ .
- Si  $\bar{S} \in Z_3$ , alors le temps minimal est  $t(v) = \frac{\bar{S}_1}{v_1^{max}}$  et les minimisantes du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  sont les solutions de  $\dot{S} = v$ ,  $v \in \partial V_{e_1}$  et  $S(0) = 0$ , qui atteignent la cible  $\mathcal{C}_{\bar{S}}$  sur la demi-droite  $\{S_1 = \bar{S}_1\} \times \{S_2 > \bar{S}_2\}$ .
- Si  $\bar{S} \in Z_2$ , alors le temps minimal est  $t(v) = \frac{\|\bar{S}\|}{\|v_{\bar{S}}\|}$  et les minimisantes du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  sont les solutions de  $\dot{S} = v$ ,  $v \in \partial V_p$ , et  $S(0) = 0$ , vérifiant  $S(t(v)) = \bar{S}$ , où  $\partial V_p$  est le plus grand segment inclus dans  $\partial V$  contenant  $v_{\bar{S}}$  dans son intérieur.

**Remarque** Dans le cas où  $\partial V$  ne contient aucun segment alors le contrôle optimal est constant et peut être déterminé géométriquement.

**Preuve** Soit  $\bar{S} \in Z_1$ , alors  $\bar{S} \notin \bigcup_{p \in S^{1+}} \mathbb{R}_+ \partial V_p$ . Ce qui implique qu'on n'est pas dans la situation du lemme 2.5 ni dans le deuxième cas du lemme 2.4. On est donc en mesure d'appliquer le premier point du lemme 2.4 et de conclure le résultat. De la même manière on montre le deuxième point du théorème qui correspond au cas  $\bar{S} \in Z_3$ .

Supposons maintenant que  $\bar{S} \in Z_2$ . Si  $\bar{S} \notin \partial V_{e_1} \cup \partial V_{e_2}$  alors on est forcément dans la situation du lemme 2.4 et on déduit le résultat.

Soit  $\bar{S} \in \mathbb{R}_+ \partial V_{e_1}$ , deux cas se présentent. Si  $S(t(v)) = \bar{S}$ , alors d'après le lemme 2.5 on déduit que  $t(v) = \frac{\|\bar{S}\|}{\|v_{\bar{S}}\|}$ . Si  $S(t(v)) \in \{S_1 = \bar{S}_1\} \times \{S_2 > \bar{S}_2\}$ , alors d'après le lemme 2.4 on déduit que  $t(v) = \frac{\bar{S}_1}{v_1^{max}}$ . Comme  $\frac{\|\bar{S}\|}{\|v_{\bar{S}}\|} = \frac{\bar{S}_1}{v_1^{max}}$ , on déduit que les seules trajectoires minimisantes pour le problème  $(\mathcal{P}_{co})$  sont les solutions de  $\dot{S} = v$ ,  $v \in \partial V_{e_1}$  et  $S(0) = 0$ , telles que  $S(t(v)) \in \{S_1 = \bar{S}_1\} \times \{S_2 \geq \bar{S}_2\}$ .

Le cas où  $\bar{S} \in \mathbb{R}_+ \partial V_{e_2}$  se démontre de la même manière.  $\square$

### 2.3 Retour au problème $(\mathcal{P}_0)$

On considère de nouveau les problèmes  $(\mathcal{P}_0)$  et  $(\mathcal{P})$ . Soit  $V$  l'enveloppe convexe de  $\{F_1(u), F_2(u)\}$ ,  $u \in [0, 1]$ . On note  $(\mathcal{P}_{co})$  le problème associé à  $V$ .

**Proposition 2.7** *Les problèmes  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}_{co})$  ont même valeur.*

**Preuve** Notons d'abord que le temps minimal  $t_{min}(\mathcal{P}_{co})$  du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  est inférieur ou égal au temps minimal  $t_{min}(\mathcal{P})$  du problème  $(\mathcal{P})$ . Montrons que les deux problèmes  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}_{co})$  sont équivalents. D'après la proposition 2.2, il existe au moins une solution optimale du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  pour la

dynamique  $\dot{S} \in V$ . Ces solutions vérifient le théorème 2.6. En particulier, il existe toujours une solution optimale avec un contrôle constant  $v \in \partial V$  ( $v = v_{\bar{S}}$  si  $\bar{S} \notin Z_1 \cup Z_3$  et  $v \in \partial V_{e_1}$  ou  $v \in \partial V_{e_2}$  si  $\bar{S} \in Z_1 \cup Z_3$ ). Un tel point s'écrit  $v = \lambda F(u_1) + (1 - \lambda)F(u_2)$ , où  $F = (F_1, F_2)$ . La trajectoire minimisante du problème  $(\mathcal{P}_{co})$  correspond au contrôle donné par:

$$\begin{cases} v_1 = F(u_1) & \text{pendant } \lambda t_{min}(\mathcal{P}_{co}), \\ v_2 = F(u_2) & \text{pendant } (1 - \lambda)t_{min}(\mathcal{P}_{co}). \end{cases} \quad (2.13)$$

Cette trajectoire est aussi une trajectoire de  $\dot{S} = F(u)$ , pour  $u$  tel que  $\mu(u)$  satisfait les conditions du théorème 2.6. On en déduit que  $t_{min}(\mathcal{P}) \leq t_{min}(\mathcal{P}_{co})$ .  $\square$

La proposition 2.7 permet de résoudre complètement le problème  $(\mathcal{P}_0)$ . En effet, on définit l'homéomorphisme, pour une condition initiale  $s^0$  donnée:

$$\varphi : (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(s_1, s_2) \mapsto \left( \int_{s_1}^{s_1^0} \frac{ds}{\rho_1(s)}, \int_{s_2}^{s_2^0} \frac{ds}{\rho_2(s)} \right)$$

La valeur de  $t_{min}(\mathcal{P}_0)$ , obtenue en partant de  $s^0$ , est égale à  $t_{min}(\mathcal{P}_{co})$ , obtenu en partant de  $\varphi(s^0)$  d'après les propositions 2.1 et 2.7. Cette solution est donnée par le théorème 2.6.

Pour les contrôles minimisants: remarquons que  $u(\cdot)$  est minimisant pour  $(\mathcal{P}(\varphi(s^0)))$  (et donc pour  $(\mathcal{P}_0(s^0))$ ) ssi  $v(t) = f(u(t))$  est minimisant pour  $(\mathcal{P}_{co}(\varphi(s^0)))$ . Cela permet de retrouver les contrôles minimisants de  $(\mathcal{P}_0(s^0))$  à partir des contrôles minimisants de  $(\mathcal{P}_{co}(\varphi(s^0)))$  donnés par le théorème 2.6. On déduit en particulier de la preuve de la proposition 2.7 la propriété suivante.

**Corollaire 2.8** *Pour tout  $s^0 \in \mathbb{R}_+^2$ , il existe un contrôle optimal pour le problème  $(\mathcal{P}_0)$  qui est constant par morceaux avec une discontinuité au plus.*

**Remarque** L'extension des résultats précédents est possible dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  et au cas où le contrôle prend ses valeurs dans n'importe quel intervalle compact.

## 3 Application

### 3.1 Modèle

Nous nous intéressons à un modèle dans lequel la concentration en oxygène est la variable de contrôle et où deux réactions biologiques - pouvant avoir

lieu simultanément - sont nécessaires pour traiter deux types de substrats distincts. Les deux biomasses microbiennes en jeu sont respectivement limitées et inhibées par leur substrat respectif, l'une étant favorisée par l'oxygène (réaction aérobie) alors que la seconde est inhibée (réaction anoxique). Dans la première partie, on s'intéresse à la mise au point d'une stratégie de contrôle optimal en temps minimal, puis, dans une seconde partie, à la synthèse d'une commande optimale en temps et en énergie, afin de minimiser à la fois le temps de réaction et la quantité d'oxygène consommé. Appliquons les résultats obtenus dans les sections précédentes pour résoudre ce problème. On considère les réactions biologiques suivantes:



On suppose que  $s_1$  et  $s_2$  désignent deux substrats que l'on cherche à éliminer,  $x_1$  et  $x_2$  sont les biomasses, c'est-à-dire les concentrations en bactéries qui consomment respectivement  $s_1$  et  $s_2$  pour leur croissance.

La première réaction est une réaction favorisée par la présence d'oxygène tandis que la seconde est inhibée par l'oxygène.

La concentration en oxygène  $u$  est considérée comme la commande dans ce système. En supposant que l'on s'intéresse à un système fonctionnant en mode batch, le modèle du bioprocédé s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu_1(s_1, u)x_1, \\ \dot{s}_1 = -\nu_1(s_1, u)x_1, \\ \dot{x}_2 = \nu_2(s_2, u)x_2, \\ \dot{s}_2 = -\nu_2(s_2, u)x_2, \end{cases} \quad (3.3)$$

où la fonction de croissance  $\nu_1$  est strictement croissante par rapport à  $u$  et la fonction  $\nu_2$  est strictement décroissante par rapport à  $u$ .

Comme la première réaction est une réaction aérobie, la variation de  $s_1$  est nulle si l'oxygène est absent. De plus, cette variation augmente d'une manière continue lorsque la quantité de l'oxygène injectée dans le réacteur augmente aussi. Et inversement pour la variation de  $s_2$ , ce qui nous conduit à supposer:

**H<sub>1</sub>** :  $\nu_1(s_1, u) = \mu_1(s_1)f_1(u)$  et  $\nu_2(s_2, u) = \mu_2(s_2)f_2(u)$ , avec  $\rho_1, \rho_2, f_1$  et  $f_2$  vérifient les hypothèses citées dans la section 2.1.  $f_1$  est strictement croissante et  $f_2$  est strictement décroissante.

**H<sub>2</sub>** :

$$0 \leq u(t) \leq 1.$$

Notons que l'on a, par conservation de masse dans le système (3.3):

$\dot{s}_i(t) + \dot{x}_i(t) = 0$  pour  $i = 1, 2$ , pour tout  $t$  positif. On pose alors  $M_1 = s_1(0) + x_1(0)$  et  $M_2 = s_2(0) + x_2(0)$ . Sans perte de généralité, supposons que  $M_1 = M_2 = 1$ .

Le système (3.3) est alors équivalent au système bidimensionnel :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -f_1(u)\rho_1(s_1), \\ \dot{s}_2 = -f_2(u)\rho_2(s_2), \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\rho_1(s_1) = \mu_1(s_1)(1 - s_1)$  et  $\rho_2(s_2) = \mu_2(s_2)(1 - s_2)$ . Les fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont positives, continues et vérifient  $\mu_1(0) = \mu_2(0) = 0$ . Autrement dit,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont nulles en 0 et en 1, i.e. elles sont nulles en absence de substrat ou de biomasse associée. Le système (3.4) vérifie donc les hypothèses introduites au début de la section 2.1.

Le but est de régler la concentration d'oxygène  $u$  afin d'amener les concentrations  $s_1$  et  $s_2$  en dessous d'un certain seuil.

## 3.2 Validation du modèle

Pour les simulations, on choisit  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $f_1$  et  $f_2$  ayant une signification biologique. En effet, ce sont des fonctions qui modélisent le taux de dégradation des substrats dont on cherche à contrôler les concentrations. Le choix des fonctions de croissance dépend essentiellement de la nature des substrats traités. Dans la littérature du traitement de l'eau, la limitation par l'oxygène de la vitesse de l'oxydation du carbone (ou de la nitrification) est généralement modélisée par une fonction de Monod en oxygène de la forme  $\mu_{max} \frac{O_2}{K_s + O_2}$  qui vient multiplier la fonction de croissance en carbone (ou en nitrate). D'une manière analogue, l'inhibition de la croissance de la biomasse par un substrat où par l'oxygène est modélisée par une fonction du type  $(\mu_{max} \frac{K_s}{K_s + O_2})$ . Par suite, la limitation de la vitesse de dégradation de ce substrat est modélisée par le produit d'une fonction de Monod en le substrat et de la fonction d'inhibition en oxygène.

**Remarque** Il peut arriver qu'on choisisse un type de substrat  $s$  pour le traitement qui devient inhibiteur à forte concentration. Ce phénomène peut être modélisé par les fonctions de croissance de type Haldane:

$\mu_{max} \frac{s}{K_s + s + K_1/s^2}$ . Cette fonction est décroissante à partir d'un seuil critique de  $s$ .

On considère la fonction coût:

$$C(u) = t(u) + \alpha \int_0^{t(u)} u^2(s) ds, \quad \alpha \geq 0,$$

i.e., on prend  $J(u) = J_\alpha(u) = \alpha u^2$ . Cette fonction coût exprime le compromis entre le temps pour atteindre la cible et l'énergie de l'oxygène injecté

pendant cette durée. Considérons également les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies sur  $[0,1]$  par:

$$f_1(u) = \frac{u}{0.2 + u} \quad \text{et} \quad f_2(u) = \frac{0.1}{0.1 + u}.$$

Pour tout  $\alpha > 0$ , on définit alors le problème de contrôle optimal suivant:

$$(\mathcal{P}_\alpha) \begin{cases} \text{Minimiser } C(u) = t(u) + \alpha \int_0^{t(u)} u^2(\tau) d\tau, \\ u \in L^\infty([0, t(u)], [0, 1]), \\ s \text{ solution de (3.4) } s(0) = s^0 \text{ et } s(t(u)) \in \mathcal{C}_0. \end{cases}$$

Avec ces choix des fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $J$ , toutes les courbes:

$$\mathcal{C}_\alpha = \left\{ \left( \frac{f_1(u)}{1 + J_\alpha(u)}, \frac{f_2(u)}{1 + J_\alpha(u)} \right); \quad u \in [0, 1] \right\},$$

$\alpha \in \mathbb{R}_+$  sont strictement convexes. Donc d'après la remarque 2.2.4, le contrôle optimal du problème  $(\mathcal{P}_\alpha)$  est constant.

**Remarque** Pour ce choix des fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $J$ , la zone  $Z_2^\alpha$  est vide. Et par suite, la valeur du contrôle optimal dépend de l'appartenance de  $\bar{S}$  à  $Z_2^\alpha$  ou à  $Z_3^\alpha$ . Notons aussi que les zones  $Z_2^\alpha$  et  $Z_3^\alpha$  forment une partition de  $\mathbb{R}_+^2$ .

En pratique,  $s_1^0$  et  $s_2^0$  (les concentrations initiales des matières nuisibles) sont toutes les deux au dessus du seuil qui définit la cible  $\mathcal{C}_0$ . Autrement dit,  $s_1^0 \geq a$  et  $s_2^0 \geq b$ . Pour cela, nous restreindrons notre étude au seul cas où  $s^0 \in D_2$ , où  $D_2$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}_+^2$  défini par:

$$D_2 = \{s^0 \in \mathbb{R}_+^2, s_1^0 \geq a \text{ et } s_2^0 \geq b\}.$$

On considère donc la restriction de l'homéomorphisme  $\varphi$  sur  $D_2$  définie par:

$$\varphi : D_2 \rightarrow (\mathbb{R}_+)^2$$

$$(s_1, s_2) \mapsto \left( \int_{s_1}^{s_1^0} \frac{ds}{\rho_1(s)}, \int_{s_2}^{s_2^0} \frac{ds}{\rho_2(s)} \right).$$

On pose:  $Z_i^\alpha = \varphi^{-1}(Z_i^\alpha)$ , pour  $i \in \{2, 3\}$  et on définit une partition de la région de  $D_2$ . Pour tout  $s^0 \in Z_3^\alpha$  la trajectoire minimisante  $x_{\bar{u}}(\cdot)$  qui part de  $s^0$  et qui correspond au contrôle:

$$\bar{u} = \operatorname{argmax}_{u \in [0,1]} \frac{f_1(u)}{1 + J_\alpha(u)}$$

atteint la cible  $\mathcal{C}_0$  en un point de  $\{s_1 = a\} \times \{s_2 < b\}$ . Si  $s^0 \notin \mathcal{Z}_3^\alpha$ , toutes les trajectoires minimisantes qui partent de  $s^0$  atteignent la cible par le coin  $(a, b)$ .

D'après le théorème 2.6 et la proposition 2.7 et en utilisant l'homéomorphisme  $\varphi$ , on remarque que:

- En partant d'une condition initiale  $s^0 \in \mathcal{Z}_3^\alpha$ , l'énergie est minimale mais la trajectoire met plus de temps pour atteindre la cible. En revanche, pour  $s^0 \notin \mathcal{Z}_3^\alpha$ , l'énergie de l'oxygène dépensé est plus grande mais le temps est minimal.

Ainsi, quand le coût lié à l'oxygénation est relativement important (par rapport au coût lié au temps), il peut arriver que la stratégie optimale ne minimise pas le temps. Dans ce cas, la concentration finale de l'un des substrats ( $s_2$ ) sera inférieure au seuil de la cible.

- En pratique, le fait que le contrôle optimal soit constant est intéressant puisqu'il n'y a pas de variation d'injection de l'oxygène.

### 3.3 Simulations numériques

#### 3.3.1 Cas où les fonctions de croissance sont de type *Monod*

On considère les fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  définies sur  $[0,1]$  par:

$$\mu_1(x) = 0.5 \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad \mu_2(x) = 0.8 \frac{x}{1+x}.$$

La fonction  $f_1$  est une fonction de Monod, la fonction  $f_2$  exprime l'effet de

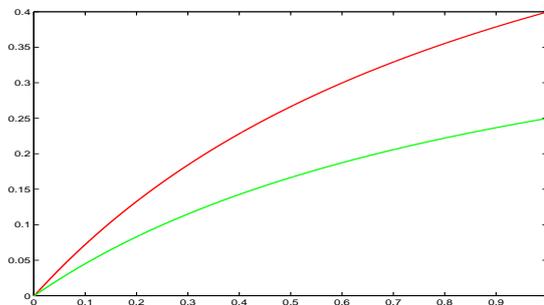


Figure 2.5: La courbe de  $\mu_1$  (en vert) et la courbe de  $\mu_2$  (en rouge).

l'inhibition à forte concentration en oxygène. Prenons les données numériques

suivantes: la cible est définie par  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ , les conditions initiales sont données par:  $s_1^0 = 0.65$  et  $s_2^0 = 0.5$ . On trace les zones  $Z_2^\alpha$  et  $Z_3^\alpha$  ainsi que les régions  $\mathcal{Z}_2^\alpha$  et  $\mathcal{Z}_3^\alpha$  correspondantes respectivement pour  $\alpha = 0, 10, 20$ .

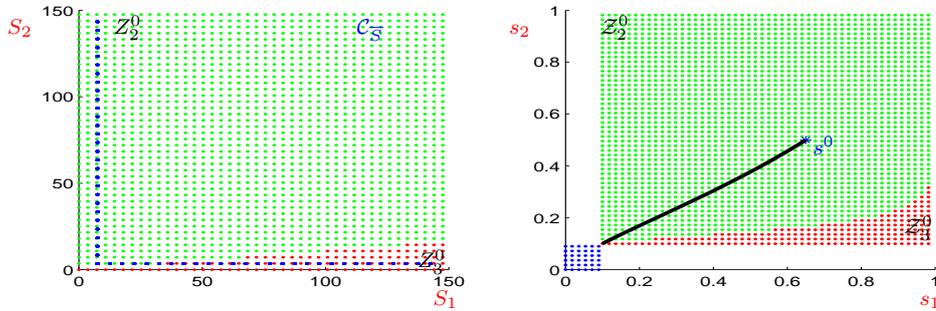


Figure 2.6: Les zones  $Z_2^0$ ,  $Z_3^0$ ,  $\mathcal{Z}_3^0$  et  $\mathcal{Z}_2^0$ .

Dans ce cas ( $\alpha = 0$ ), la zone  $Z_2^0$  (respectivement  $\mathcal{Z}_2^0$ ) est plus importante que la zone  $Z_3^0$  (respectivement  $\mathcal{Z}_3^0$ ). La condition initiale  $s^0$  est dans  $\mathcal{Z}_2^0$ , c'est un problème de contrôle en temps minimal, la cible est atteinte par le point  $(a, b)$  (voir figure 2.6).

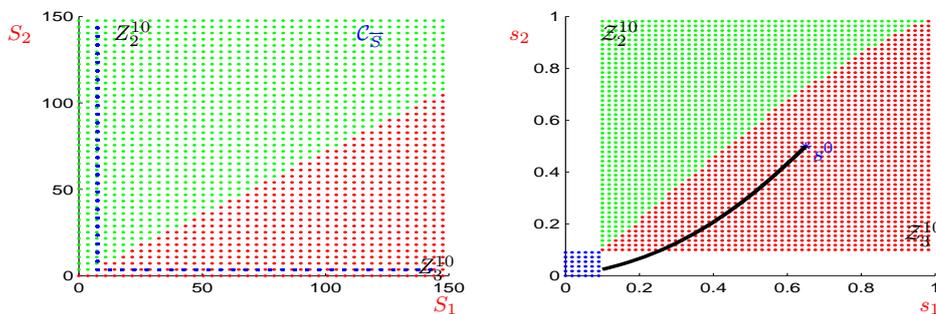


Figure 2.7: Les zones  $Z_2^{10}$ ,  $Z_3^{10}$ ,  $\mathcal{Z}_3^{10}$  et  $\mathcal{Z}_2^{10}$ .

Dans le cas où  $\alpha = 10$ ,  $s^0 \in \mathcal{Z}_3^{10}$ , le temps n'est plus minimal mais l'énergie en oxygène mise pour atteindre la cible est minimale (voir figure 2.7).

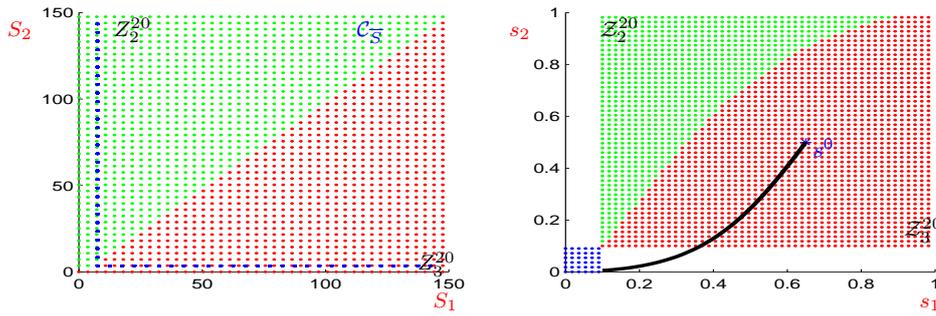


Figure 2.8: Les zones  $Z_2^{20}$ ,  $Z_3^{20}$ ,  $Z_3^{20}$  et  $Z_2^{20}$ .

Pour  $\alpha = 20$ , c'est  $Z_3^{20}$  (respectivement  $Z_3^{20}$ ) qui est plus importante que  $Z_2^{20}$  (respectivement  $Z_2^{20}$ ). Ici, aussi le temps n'est pas minimal, la minimisation de l'énergie est privilégiée (voir figure 3.9).

Pour les mêmes données numériques, on trace la courbe du temps de la trajectoire optimale (pour atteindre la cible) en fonction de  $\alpha$  (voir figure 2.32).

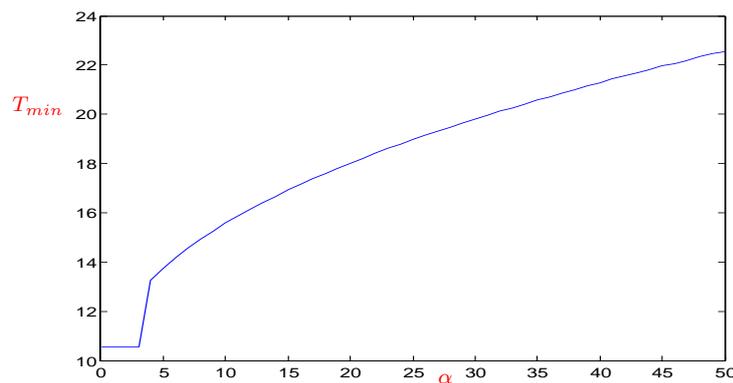


Figure 2.9: Le temps de la trajectoire optimale  $T_{min}$  en fonction de  $\alpha$ .

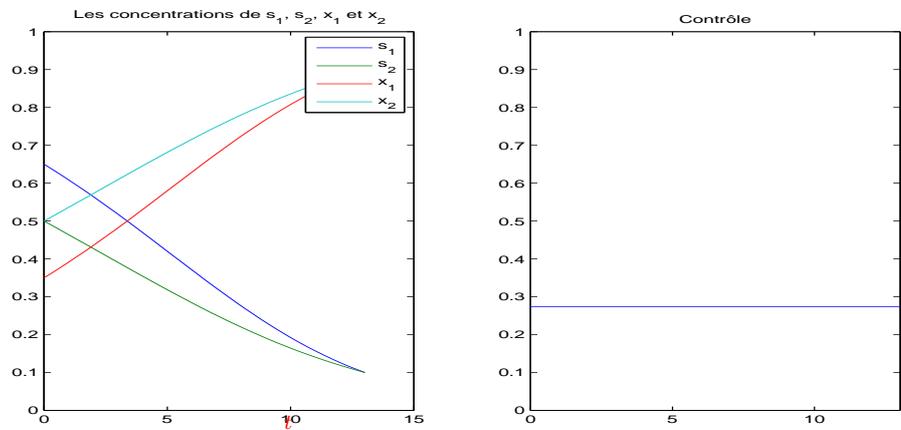


Figure 2.10:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 0$ .

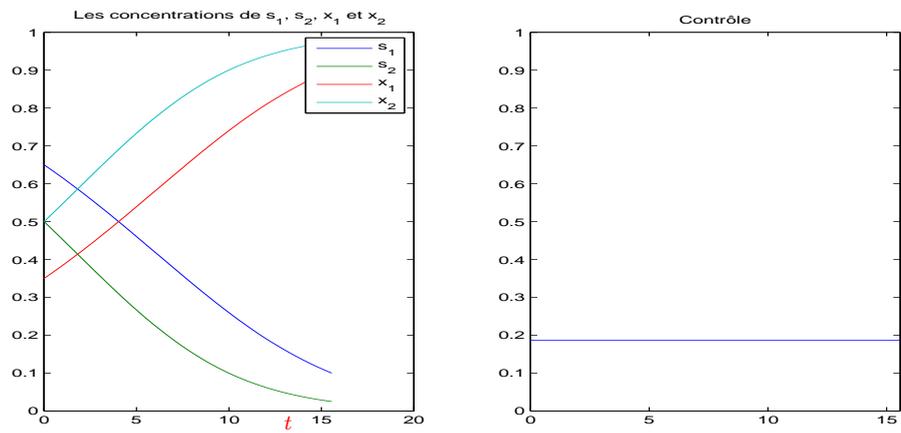


Figure 2.11:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 10$ .

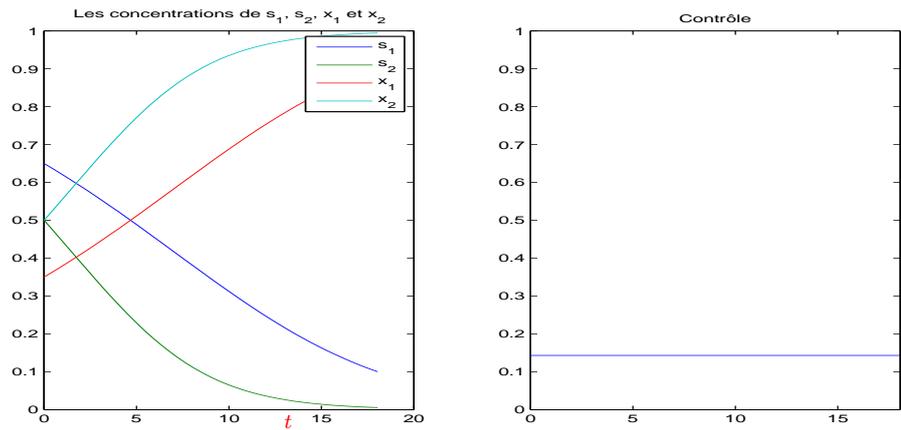


Figure 2.12:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 20$ .

### 3.3.2 Cas où les fonctions de croissance sont de type *Haldane*

Dans les figures 2.14, 2.15 et 2.16, on considère des fonctions de croissance  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui correspondent à une inhibition par le substrat. Prenons donc,

$$\mu_1(x) = 0.5 \frac{x}{1+x+100x^2} \quad \text{et} \quad \mu_2(x) = 0.8 \frac{x}{1+x+100x^2}$$

Les courbes des fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont illustrées dans la figure 3.13.

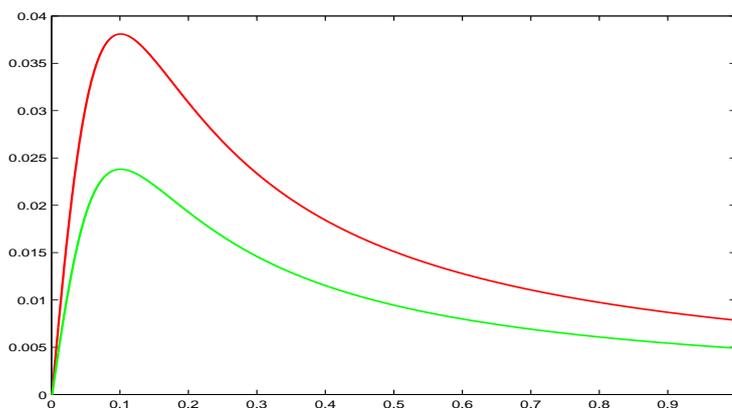


Figure 2.13: La courbe de  $\mu_1$  (en vert) et la courbe de  $\mu_2$  (en rouge).

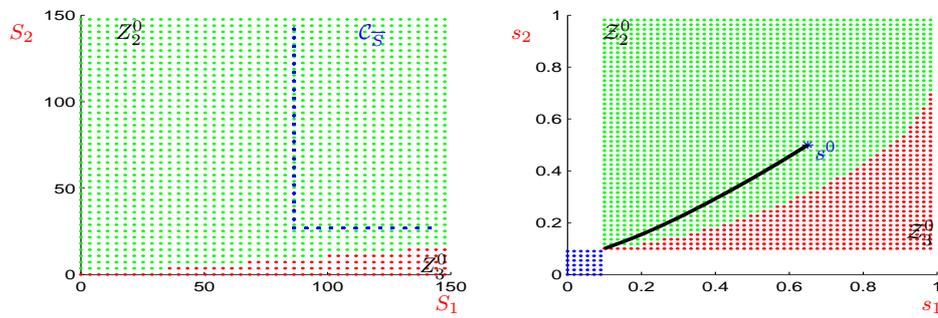


Figure 2.14: Les zones  $Z_2^0$ ,  $Z_3^0$ ,  $Z_3^0$  et  $Z_2^0$ .

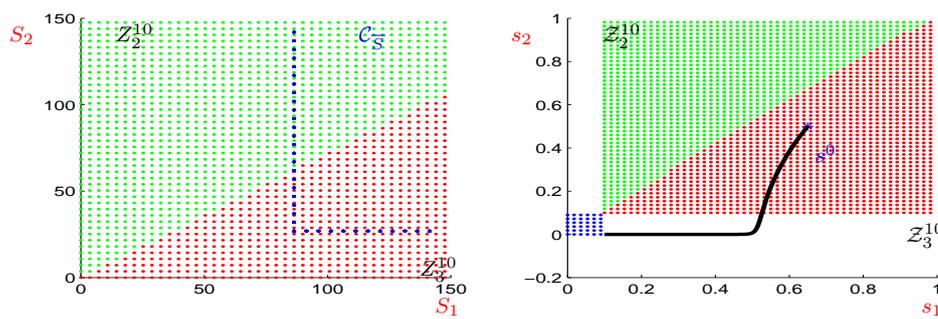


Figure 2.15: Les zones  $Z_2^{10}$ ,  $Z_3^{10}$ ,  $Z_3^{10}$  et  $Z_2^{10}$ .

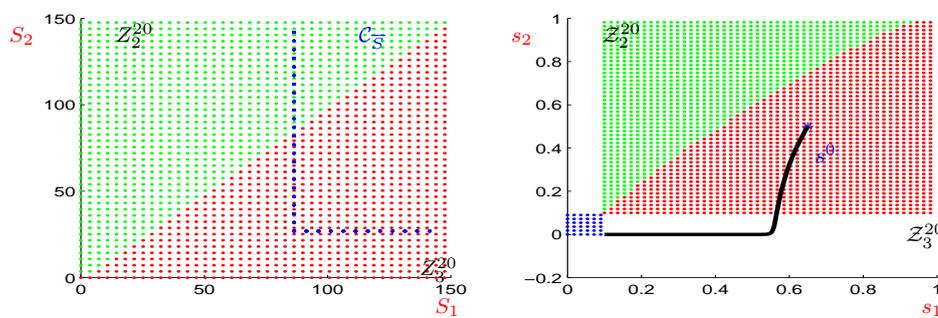


Figure 2.16: Les zones  $Z_2^{20}$ ,  $Z_3^{20}$ ,  $Z_3^{20}$  et  $Z_2^{20}$ .

On remarque que le même phénomène se répète. En revanche, les régions  $Z_3^0$  et  $Z_3^0$  sont plus grandes que dans le cas de *Monod*. Donc pour  $\alpha = 0$ , (problème de contrôle en temps minimal), on a moins de possibilité d'atteindre la cible en temps minimal. Par contre, les régions  $Z_3^{10}$ ,  $Z_3^{20}$ ,  $Z_3^{10}$  et  $Z_3^{20}$  diminuent par rapport au cas où les fonctions de croissance sont de type Monod. Ce qui implique que, si on cherche à traiter deux substrats inhibiteurs à forte concentration, on peut atteindre la cible en temps minimal.

Dans les figures suivantes, on traite les quinze cas (optimaux)  $x_1, x_2, s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  ainsi que de substrat (les fonctions de Monod) différentes valeurs de  $\alpha$ .

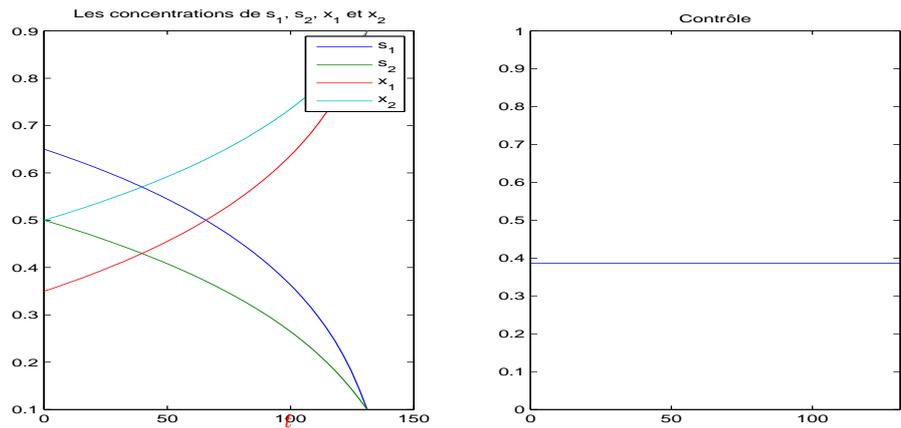


Figure 2.17:  $x_1, x_2, s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 0$ .

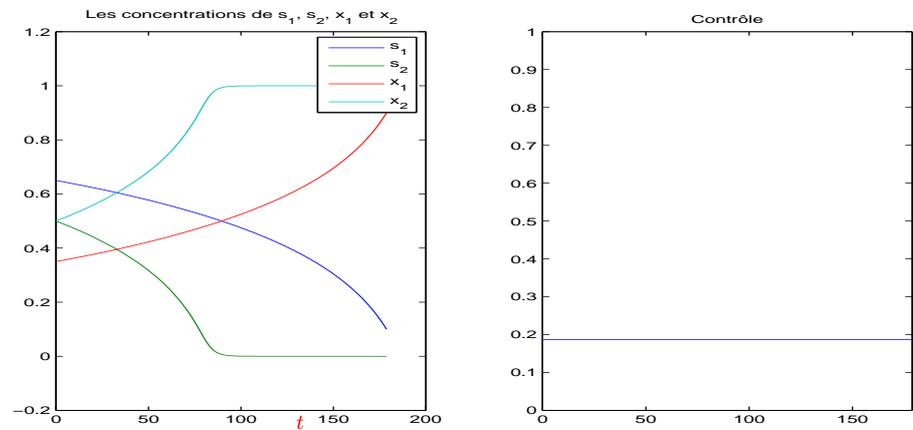


Figure 2.18:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 10$ .

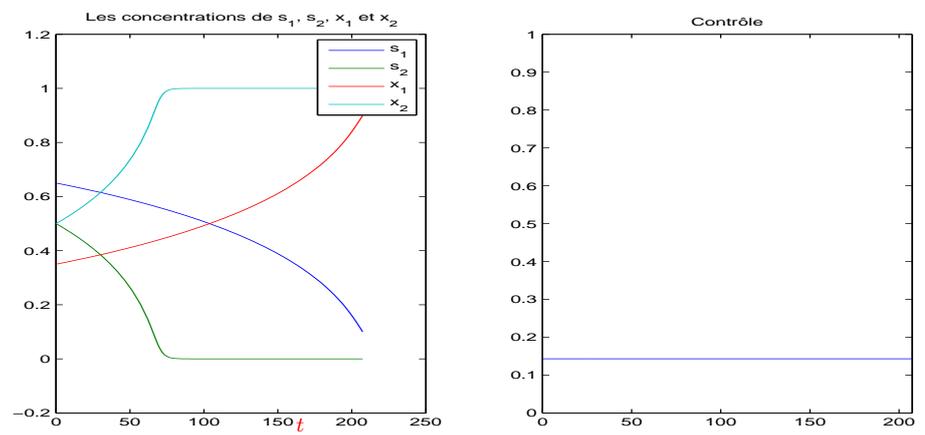


Figure 2.19:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 20$ .

### 3.3.3 Cas où $\mu_1$ est de type Monod et $\mu_2$ est de type Haldane

Dans les figures 2.21, 2.22 et 2.23, on considère des fonctions de croissance  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui correspondent à une limitation par le substrat pour l'une (fonction de Monod) et une inhibition en substrat pour l'autre (fonction de Haldane). Prenons donc,

$$\mu_1(x) = 0.5 \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad \mu_2(x) = 0.8 \frac{x}{1+x+100x^2}.$$

La figure 3.20 illustre les courbes de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

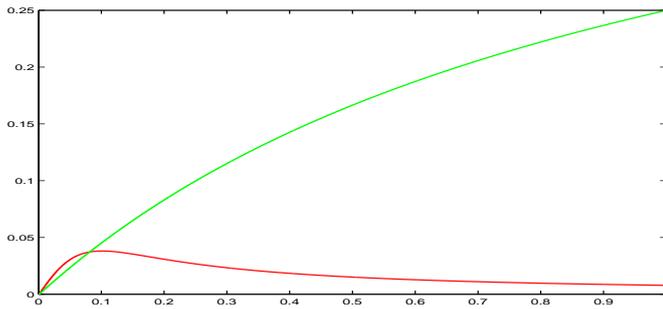


Figure 2.20: La courbe de  $\mu_1$  (en vert) et la courbe de  $\mu_2$  (en rouge).

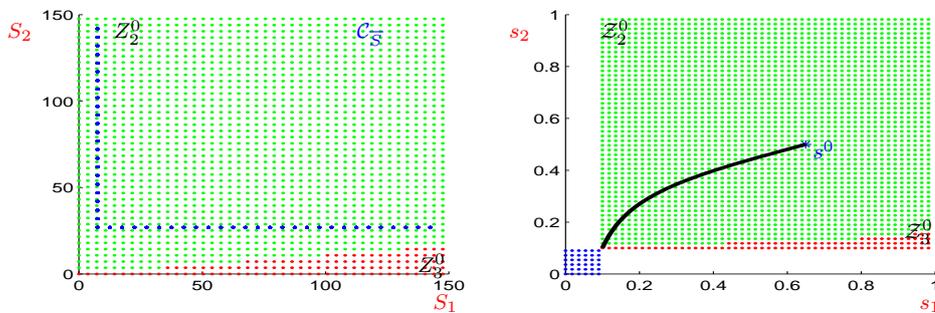


Figure 2.21: Les zones  $Z_2^0$ ,  $Z_3^0$ ,  $Z_3^0$  et  $Z_2^0$ .

Dans ce cas,  $s^0 \in Z_3^0$ , la cible n'est pas atteinte en temps minimal.

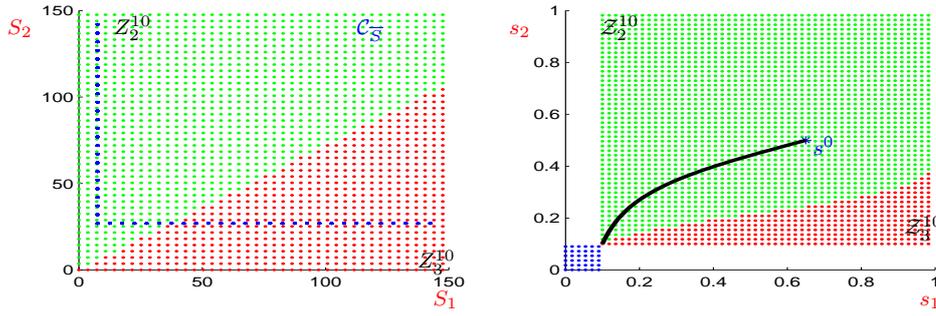


Figure 2.22: Les zones  $Z_2^{10}$ ,  $Z_3^{10}$ ,  $Z_3^{10}$  et  $Z_2^{10}$ .

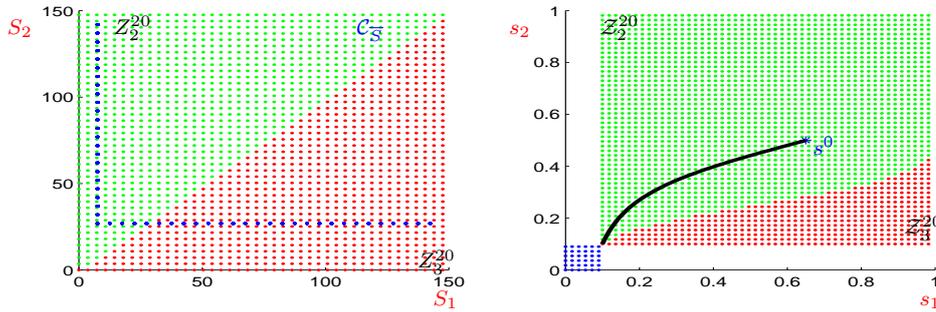


Figure 2.23: Les zones  $Z_2^{20}$ ,  $Z_3^{20}$ ,  $Z_3^{20}$  et  $Z_2^{20}$ .

On remarque que les régions  $Z_3^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 10, 20$ , augmentent quand la valeur de  $\alpha$  croit. Mais cette variation diminue d'une manière significative par rapport au cas étudiés précédemment. Si on travaille avec deux espèces de nature différente, l'une avec un taux de croissance limité en substrat et limité en oxygène, l'autre avec un taux de croissance inhibiteur en substrat et en oxygène, le problème de contrôle en temps minimal est privilégié. Dans les figures suivantes, on trace les concentrations (optimales)  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$ , ainsi que le contrôle  $u$  correspondant pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

### 3.3.4 Cas où $\mu_1$ est de type *Haldane* et $\mu_2$ est de type *Monod*

Dans les figures 2.26, 2.27 et 2.28 on considère des fonctions de croissance  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui correspondent à une inhibition par le substrat pour l'une (fonction de Haldane) et une limitation en substrat pour l'autre (fonction de Monod). Prenons donc,

$$\mu_1(x) = 0.5 \frac{x}{1 + x + 100x^2} \quad \text{et} \quad \mu_2(x) = 0.8 \frac{x}{1 + x}.$$

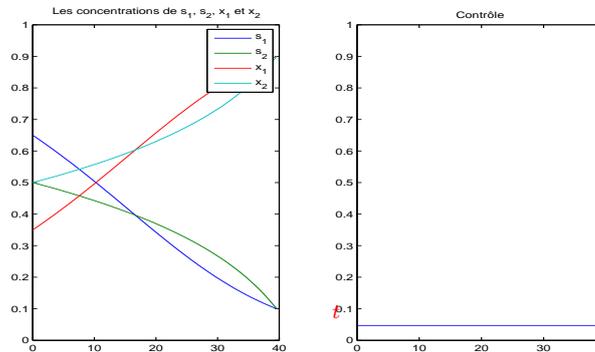


Figure 2.24:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant ( $\alpha = 0, 10, 20$ ).

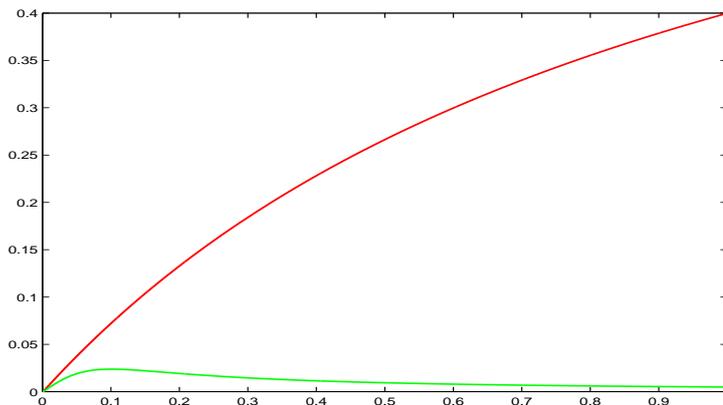


Figure 2.25: La courbe de  $\mu_1$  (en vert) et la courbe de  $\mu_2$  (en rouge).

Dans ce cas, la zone  $Z_3^0$  (respectivement  $Z_3^0$ ) est plus importante que la zone  $Z_2^0$  (respectivement  $Z_2^0$ ). De plus, pour  $\alpha = 0$  le point  $s^0$  est dans la région qui favorise la minimisation de l'énergie ( $Z_3^0$ ). Comme  $Z_3^0 \subset Z_3^\alpha$  pour tout  $\alpha \geq 0$ . Ce qui implique pour tout  $\alpha \geq 0$  on ne peut que traiter que de problème de minimisation de l'énergie.

On remarque que les régions  $Z_3^\alpha$ ;  $\alpha = 0, 10, 20$  augmente quand la valeur de  $\alpha$  croit. Mais cette variation augmente d'une manière significative par rapport aux cas étudiés précédemment. Si on travaille avec deux espèces de nature différente, l'un avec un taux de croissance inhibiteur en substrat et limité en oxygène, l'autre avec un taux de croissance limité en substrat et en oxygène, on privilège traiter le problème de contrôle en énergie minimale est privilégié.

Pour les mêmes données numériques, on trace la courbe du temps de la

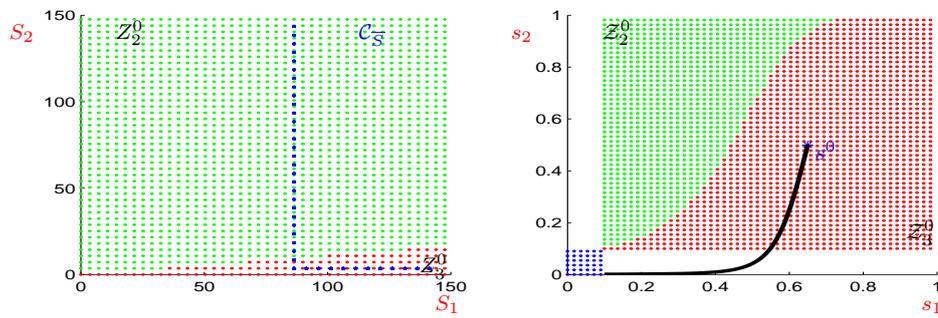


Figure 2.26: Les zones  $Z_2^0$ ,  $Z_3^0$ ,  $Z_3^0$  et  $Z_2^0$ .

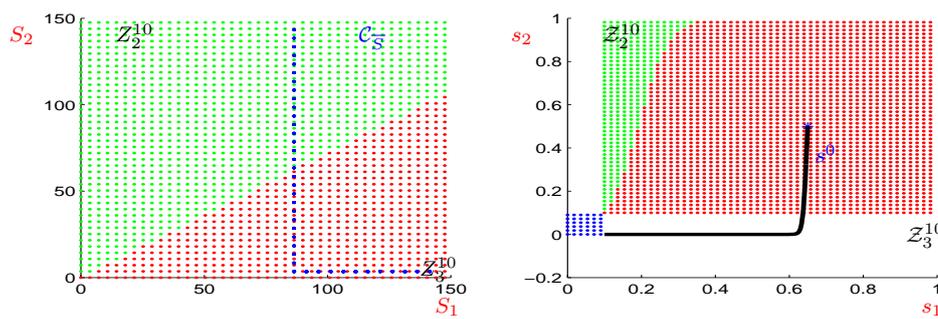


Figure 2.27: Les zones  $Z_2^{10}$ ,  $Z_3^{10}$ ,  $Z_3^{10}$  et  $Z_2^{10}$ .

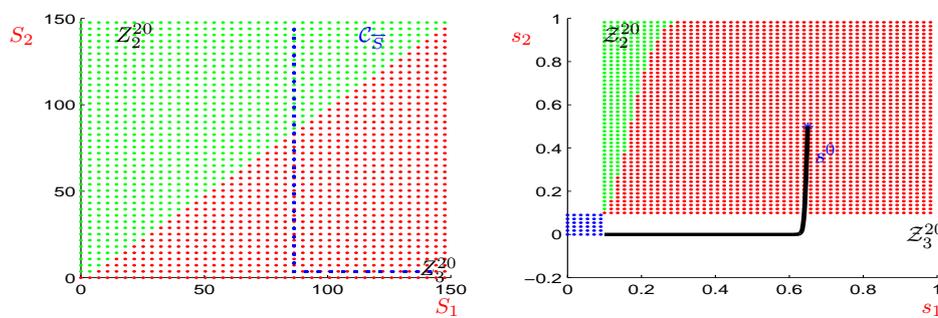


Figure 2.28: Les zones  $Z_2^{20}$ ,  $Z_3^{20}$ ,  $Z_3^{20}$  et  $Z_2^{20}$ .

trajectoire optimale en fonction de  $\alpha$ .

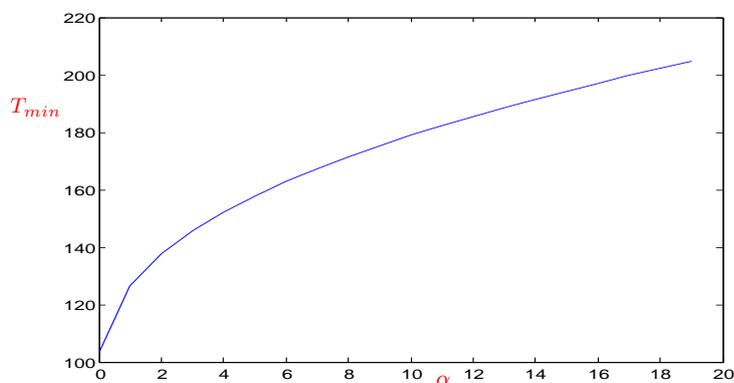


Figure 2.29: Le temps de la trajectoire optimale  $T_{min}$  en fonction de  $\alpha$ .

Ce dernier cas est assez particulier. En effet, on remarque qu'il n'y a pas un intervalle pour  $\alpha$  dans lequel le temps est constant. Ceci s'explique par le fait que  $s^0 \in \mathcal{Z}_3^\alpha$  pour tout  $\alpha \geq 0$ . On n'utilise donc que le temps qui dépend de  $\alpha$ . Dans les figures 3.30, 3.31 et 3.32, on trace les concentrations (optimales)  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$ , ainsi que le contrôle  $u$  correspondant pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

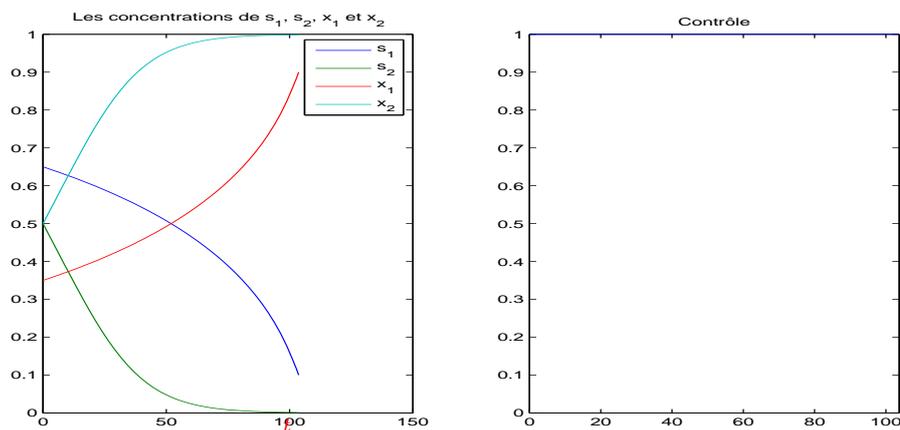


Figure 2.30:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 0$ .

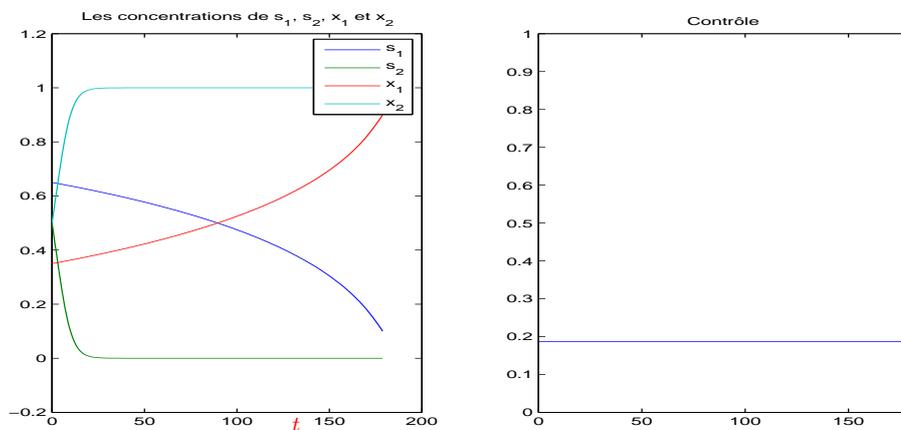


Figure 2.31:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 10$ .

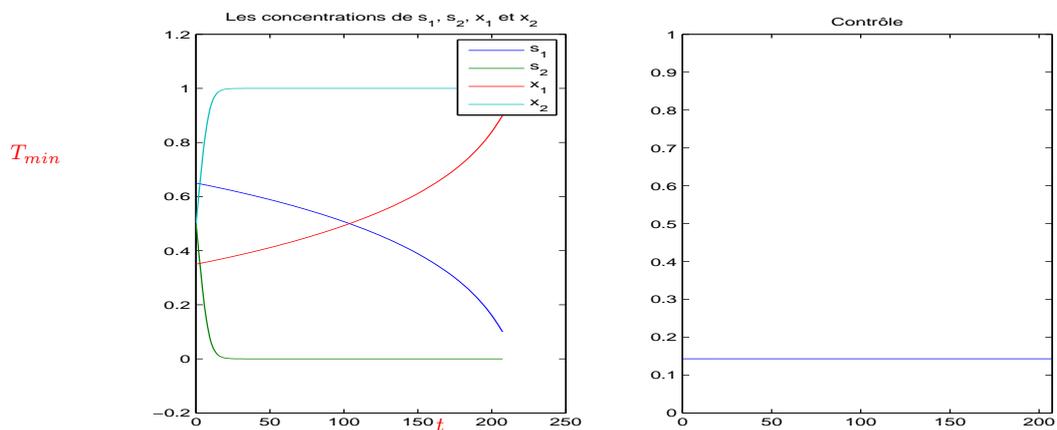


Figure 2.32:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $t$  et le contrôle  $u$  correspondant pour  $\alpha = 20$ .

## 4 Conclusion

On a étudié un problème de contrôle optimal dont la dynamique est un système différentiel couplé en la variable du contrôle et découplé en les variables d'état et où la fonction coût est l'intégrale d'une fonction positive  $J$ . On a utilisé une technique géométrique qui consiste à convexifier l'ensemble des vecteurs vitesses augmentés. Cette technique nous a permis de résoudre le problème dans un cadre très général (la continuité des fonctions de croissance en l'oxygène nous a suffit). De plus, le contrôle optimal est déterminé en résolvant un problème d'optimisation dans le plan.

On a validé notre étude par des simulations numériques sur des fonctions de croissance les plus utilisées en biologie comme la fonction de Monod et de Haldane.

# Conclusion et perspectives

Cette thèse a été consacrée à la modélisation et à l'optimisation d'un bioréacteur batch, ce qui nous a conduit à la résolution de quelques problèmes de contrôle optimal. Au premier chapitre, nous avons introduit la notion de traitement biologique de l'eau ainsi que les outils mathématiques nécessaires dans toute la suite de cette thèse. Le deuxième chapitre a été consacré essentiellement à une étude numérique du modèle tridimensionnel traité dans [1] dans un cas particulier. Nous avons commencé par quelques résultats théoriques. Des simulations numériques ont été faites par les méthodes directes via le logiciel bocop. Nous avons montré que la stratégie trouvée dans [1] est optimale bien que l'ensemble de contrôle que nous avons considéré soit plus grand que celui utilisé dans [1]. D'autres simulations ont été faites pour des problèmes de contrôle optimal où la fonction coût est un compromis temps/énergie ou bien un compromis temps/consommation afin de déterminer la structure des solutions optimales. Dans le troisième chapitre, nous avons modélisé un système composé de deux réactions biologiques. L'une est aérobie, l'autre est anoxique. Nous avons cherché la stratégie optimale d'injection d'oxygène afin de traiter les deux types de substrats en temps minimal. Ceci nous a conduit à résoudre un problème de contrôle optimal d'une manière géométrique dans le sens où on ramène le problème d'optimisation fonctionnelle à un problème d'optimisation dans le plan. On a généralisé l'étude du modèle bidimensionnel où le coût infinitésimal est de la forme  $1+J$ , où  $J$  est une fonction positive, continue et nulle en 0. Nous avons montré que le nouveau problème est équivalent à un autre problème de temps minimal qui est déjà étudié. Des simulations numériques ont été faites afin de mettre en évidence les différents phénomènes biologiques observés.

Beaucoup de perspectives sont ouvertes suite à cette thèse. On cite trois questions essentielles. D'abord, dans le chapitre II nous avons modélisé la phase aérobie par une fonction croissante en  $u$  (l'oxygène) qui est égale à  $\mu_1(u) = u$  et  $\mu_2(u) = 1 - u$  pour la phase anoxique. Ça serait utile de faire des simulations numériques dans des cas plus généraux. Par exemple, on prend  $\mu_1(u) = \frac{u}{k_1+u}$  et  $\mu_2(u) = \frac{1}{k_2+u}$ . Le changement des fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  peut influencer sur la structure du contrôle optimal et par conséquent sur la stratégie optimale d'injection d'oxygène qu'ont doit suivre.

Ensuite, les résultats numériques trouvés dans le chapitre 2 par les méthodes directes peuvent être vérifiés par les équations d'Hamilton Jacobi. Ces

équations nous donnent des conditions suffisantes d'optimisation des trajectoires. Dans ce cas, nous devons résoudre des EDP de dimension 4, ceci peut poser des difficultés numériques au niveau de la mémoire et du temps de calcul.

Enfin, par identification des paramètres on peut utiliser les commandes optimales trouvées au chapitre 2 pour des modèles plus intéressants dans le domaine de traitement biologique de l'eau, comme par exemple les modèles *ASM1* et *ASM2* [30]. Une partie de cette question a été étudiée dans [29], la commande optimale pour le problème de temps minimal trouvée dans [2] a été appliquée sur le modèle *ASM1*.

# Bibliography

- [1] D. MAZOUNI, Thèse de doctorat – Modélisation et commande en temps minimum des réacteurs biologiques séquentiels discontinus, Université Claude Bernard-Lyon I, (2006).
- [2] J. MORENO, Optimal time control of bioreactors for the wastewater treatment. *Optim. Control Appl. Meth.*, No 20, p 145-164, (1999).
- [3] D. MAZOUNI, J. HARMAND, A. RAPAPORT AND H. HAMMOURI, Optimal time control of switching systems : application to biological Sequencing Batch Reactors, *Optimal Control Application and Methods*, Vol. 31, No.4, pp. 289-301. (2010).
- [4] M. HENZE, W. GUJER, T. MINO, M. VAN LOOSDRECHT, Activated sludge models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3, Edited by IWA Task group on mathematical modelling for design and operation of biological wastewater treatment, IWA Publishing, 2000.
- [5] W. BOUHAFS, N. ABDELLATIF, F. JEAN, J. HARMAND. Commande optimale en temps minimal d'un procédé biologique d'épuration de l'eau. Actes du colloque africain sur la recherche en informatique et en mathématiques appliquées, Alger, 13-16 Octobre 2012, Algérie.
- [6] W. BOUHAFS, N. ABDELLATIF, F. JEAN, J. HARMAND. Commande optimale en temps et en énergie d'un procédé biologique d'épuration de l'eau. International Joint Conference CB-WR-MED Conference 2nd AOP, Tunisia Conference for Sustainable Water Management, Tunis: April, 24 – 27, 2013. Tunisia.
- [7] L. PONTRYAGIN AND V. BOLTYANSKII AND R. GAMKRELIDZE AND E. MISCHENKO, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley Interscience (1962), p 159-160, Edition de l'école polytechnique. Juillet 2006.
- [8] E. TRÉLAT, *Contrôle optimal, théorie et applications*. Vuibert, collection "Mathématiques concrètes", (2005), 173.
- [9] R. VINTER, *Optimal Control*. Modern Birkhäuser Classics (2000).

- [10] F.BONNANS, P.ROUCHON, Analyse et commande des systèmes dynamiques. p 159-160, Edition de l'école polytechnique. Juillet 2006.
- [11] P. MARTINON, Thèse de doctorat – Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale, L'Institut national polytechnique de Toulouse, (2005).
- [12] J. GERGAUD, Thèse d'habilitation à diriger des recherches – Sur la résolution numérique de problèmes de contrôle optimal à solution bang-bang via les méthodes homotopiques, Université de Toulouse, (2005).
- [13] C. SILVA, E. TRÉLAT, Smooth regularization of bang-bang optimal control problems. IEEE Transaction automatic control, vol 55, No 11, Novembre 2010.
- [14] M. CAPONIGRO, R. GHEZZI, B. PICCOLI, E. TRÉLAT, Regularization of chattering phenomena via bounded variation controls. .
- [15] J.STOER, R. BULIRSCH, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [16] M.C. BIGGS, "Constrained Minimization Using Recursive Quadratic Programming". Towards Global Optimization (L.C.W. Dixon and G.P. Szergo, eds.), North-Holland, pp 341-349, 1975.
- [17] S.P., HAN, "A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming". Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 22, p. 297, 1977.
- [18] M.J.D. POWELL, "The Convergence of Variable Metric Methods for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations". Nonlinear 23 Programming 3, (O.L. Mangasarian, R.R. Meyer and S.M. Robinson, eds.), Academic Press, 1978.
- [19] R. FLETCHER, "Practical Methods of Optimization". Wiley-Interscience New York, NY, USA. 1987.
- [20] P.E. GILL, W. MURRAY, AND M.H.WRIGHT, Practical Optimization, London, Academic Press, 1981.
- [22] M.J.D. POWELL, "Variable Metric Methods for Constrained Optimization". Mathematical Programming: The State of the Art, (A. Bachem, M. Grotchel and B. Korte, eds.) Springer Verlag, pp 288-311, 1983.
- [23] W. HOCK, AND K. SCHITTKOWSKI, "A Comparative Performance Evaluation of 27 Nonlinear Programming Codes". Computing, Vol. 30, p. 335, 1983.

- [24] E.D.SONTAG, *Mathematical Control Theory, Deterministic finite dimensional systems*, Springer-Verlag, 2end edition, 1998.
- [25] E.TRÉLAT, Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost, *Journal of Dynamical and Control systems*, Vol 6,N. 4, 2000, 511-541.
- [26] E.TRÉLAT, *Etude asymptotique et transcendance de la fonction valeur en contrôle optimal catégorie log-exp en géométrie Sous-Reimannienne dans le cas Martinel*. Thèse de doctorat, Univ. de Bourgogne, 2000.
- [27] E.TRÉLAT, M. CAPONIGRO, R. GHEZZI, B.PICCOLI, Regularization of chattering phenomena via bounded variation controls. Preprint 2013, arXiv:1303.5796.
- [28] W.H. FLEMMING AND R.W. RISHEL, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag, 1975.
- [29] Y. DAOUD, J. HARMAND, N. ABDELLATIF, Optimal control of a biological Sequencing Batch Reactor: an approach by simulations. 2014 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED) University of Palermo. June 16-19, 2014. Palermo, Italy.
- [30] Activated Sludge Models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3, IWA Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation for Biological Wastewater Tratement. Scientific and Technical Repport N 9.
- [31] Y. CHITOUR AND F. JEAN AND P. MASON, Optimal control models of the goal-oriented human locomotion. SIAM, control and optimization. Vol 50, 2015.