

Automatic control and WWTPs



PARTIE III (~1h30) : Control of WWTPs

Jérôme Harmand

Equipe d'ingénierie des Procédés

Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement - INRA

Projet INRA-INRIA-MERE

Narbonne - France

email : harmand@ensam.inra.fr -
<http://www.montpellier.inra.fr/narbonne>

Content



1. Properties of models and control objectives
2. Example: industrial control of a biosystem
3. Contrôle robuste d'un réacteur de digestion anaérobie
4. (Contrôleurs industriels)
5. Perspectives et problèmes ouverts

I. Objectifs de contrôle

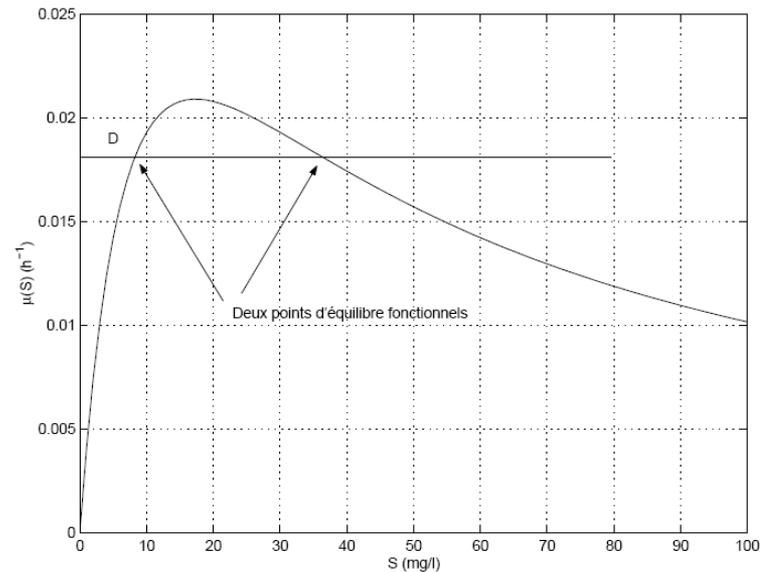
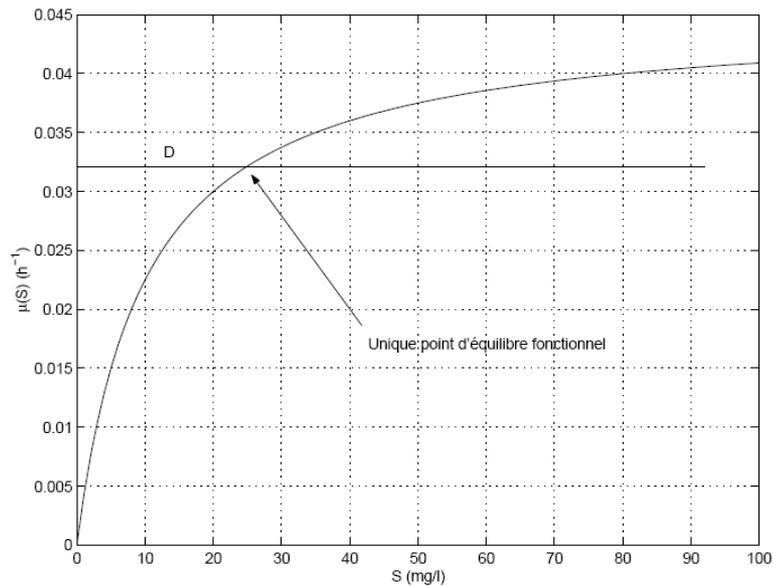


STABILISATION

I. Quelques propriétés des modèles

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = S_{in} - S \frac{Q}{V} - k\mu(S) X \\ \frac{dX}{dt} = \mu(S) X - \frac{Q}{V} X = \left(\mu(S) - \frac{Q}{V} \right) X \end{cases}$$

$$D = \frac{Q}{V}$$



I. Quelques propriétés des modèles

Points d'équilibre :

- Monod
 - Lessivage : $\{S_{in} ; 0\}$
 - Equilibre fonctionnel : $\{X=S_{in}-S ; S=\mu^{-1}(D)\}$
- Haldane
 - Lessivage : $\{S_{in} ; 0\}$
 - Equilibres fonctionnels
 - + $\{X_1=S_{in}-S_1 ; S_1=\mu^{-1}(D) | S_1 < S(\max(\mu))\}$
 - + $\{X_2=S_{in}-S_2 ; S_2=\mu^{-1}(D) | S_2 > S(\max(\mu))\}$

I. Quelques propriétés des modèles

Cas général

Soient $\delta X = X - \bar{X}$ et $\delta S = S - \bar{S}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta X) = (\mu(S) - \bar{D})X \\ \approx (\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S - \bar{D})(\bar{X} + \delta X) \\ \approx (\mu(\bar{S}) - \bar{D})(\bar{X} + \delta X) + \mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S \end{array} \right.$$

De même, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta S) = -\frac{\mu(S)X}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - S) \\ \approx -\frac{(\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S)(\bar{X} + \delta X)}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S} - \delta S) \\ \approx -\frac{\mu(\bar{S})\bar{X}}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S}) - \frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S}{Y} - \frac{\mu(\bar{S})\delta X}{Y} - \bar{D}\delta S \end{array} \right.$$

d'où on tire :

$$A = \begin{bmatrix} \mu(\bar{S}) - \bar{D} & \mu'(\bar{S})\bar{X} \\ -\frac{\mu(\bar{S})}{Y} & -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D} \end{bmatrix}$$

I. Quelques propriétés des modèles

Stabilité du point $\{\bar{X}, \bar{S}\} |_{\bar{X} \neq 0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta X) = (\mu(S) - \bar{D})X \\ \approx (\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S - \bar{D})(\bar{X} + \delta X) \\ \approx \underbrace{(\mu(\bar{S}) - \bar{D})}_{=0}(\bar{X} + \delta X) + \mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S \\ \approx \mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S \end{array} \right.$$

De même, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta S) = -\frac{\mu(S)X}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - S) \\ \approx -\frac{(\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S)(\bar{X} + \delta X)}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S} - \delta S) \\ \approx \underbrace{-\frac{\mu(\bar{S})\bar{X}}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S})}_{=0} - \frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S}{Y} - \frac{\mu(\bar{S})\delta X}{Y} - \bar{D}\delta S \\ \approx -\frac{\mu(\bar{S})\delta X}{Y} - \left(\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} + \bar{D}\right)\delta S \end{array} \right.$$

d'où on tire :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mu'(\bar{S})\bar{X} \\ -\frac{\mu(\bar{S})}{Y} & -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D} \end{bmatrix}$$

avec $\mu(\bar{S}) = \bar{D}$, $\mu'(S) = \frac{\partial \mu(S)}{\partial S}$

I. Quelques propriétés des modèles

Stabilité du point $\{\bar{X}, \bar{S}\} |_{\bar{X} \neq 0}$

Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A , on en déduit :

$$\begin{cases} \Omega &= -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D} \\ \Delta &= \frac{\bar{D}\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} \end{cases}$$

$$\text{où } \Omega = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ et } \Delta = \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

$$\text{D'où on tire } \lambda_1 = -\bar{D} \text{ et } \lambda_2 = -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y}.$$

I. Quelques propriétés des modèles

Stabilité du point $\{0, S_{in}\}$

Dans ce cas, on a :

$$A = \begin{bmatrix} \mu(S_{in}) - \bar{D} & 0 \\ -\frac{\mu(S_{in})}{Y} & -\bar{D} \end{bmatrix}$$

Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A , on en déduit :

$$\begin{cases} \Omega & = & \mu(S_{in}) - 2\bar{D} \\ \Delta & = & -\bar{D}(\mu(S_{in}) - \bar{D}) \end{cases}$$

$$\text{où } \Omega = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ et } \Delta = \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

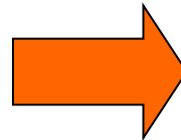
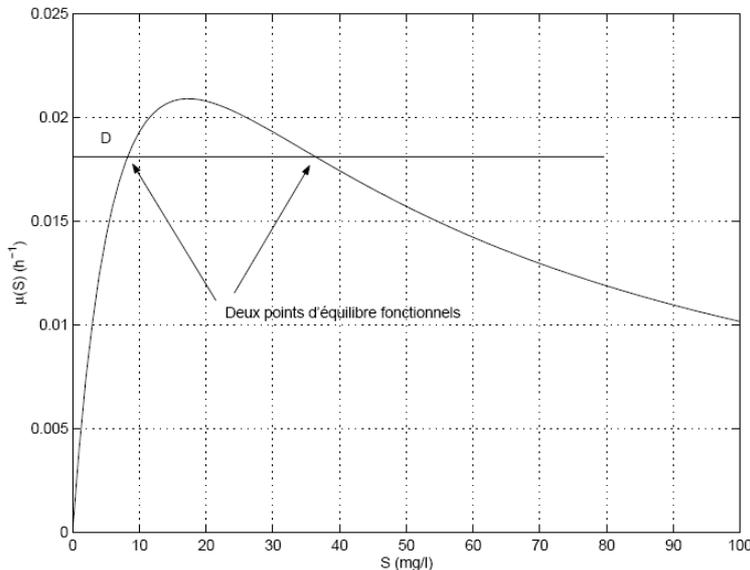
I. Quelques propriétés des modèles

Stabilité du point $\{0, S_{in}\}$

D'où on tire $\lambda_1 = -\bar{D}$ et $\lambda_2 = \mu(S_{in}) - \bar{D}$.

On en déduit que :

- Si $\mu(S_{in}) - \bar{D} > 0$, le point d'équilibre $\{0, S_{in}\}$ est asymptotiquement instable.
- Si $\mu(S_{in}) - \bar{D} < 0$ alors le point d'équilibre $\{0, S_{in}\}$ est asymptotiquement stable.



**Risk of a stable
washout!!!
First answer : BC!
Second possibility : F/FC**

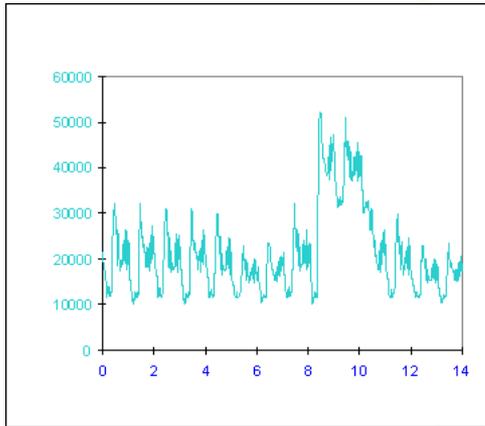


II. Objectifs de contrôle

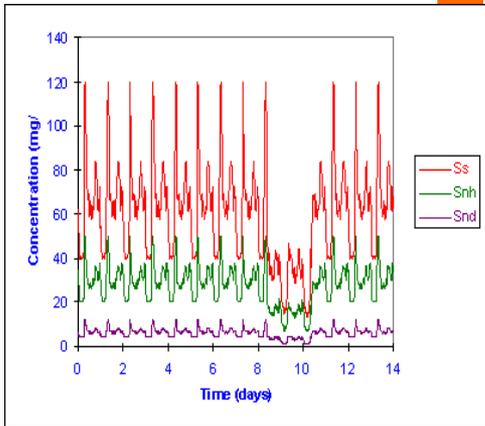
A thick, horizontal yellow brushstroke with a textured, painterly appearance, spanning most of the width of the slide.

REGULATION

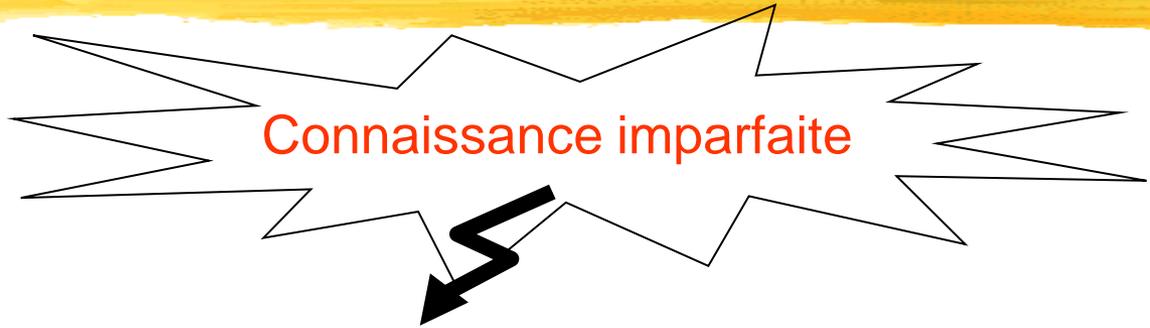
II.1 Problématique



Débit (m³/j)



Concentrations (mg/l)



Rejets < Normes

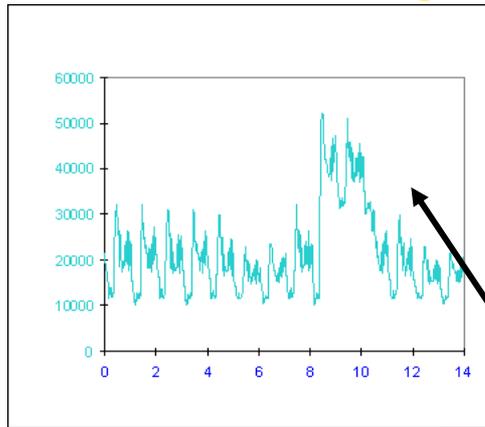


II.3 Objectifs de contrôle

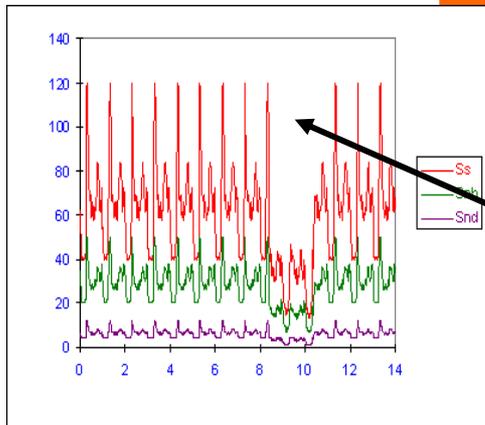


APPROCHES NON LINEAIRES

Problèmes d'observation



Débit (m³/j)



Concentrations (mg/l)

"Connaissance parfaite" du système



Mesure partielle des sorties



Estimations de variables non mesurées

Mesure des entrées

Problèmes d'observation

Soit le système :

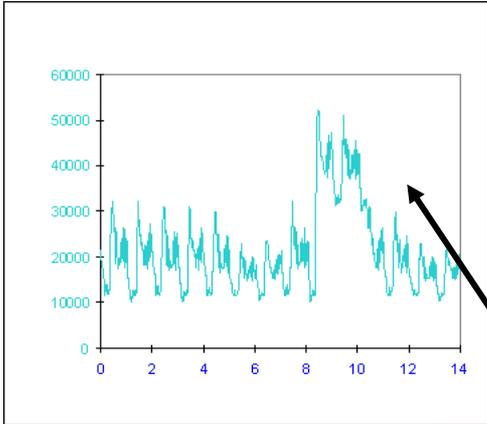
$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, U) \\ Y = G(X, U) \\ X(0) \text{ inconnu} \end{cases} \quad (S)$$

Le système :

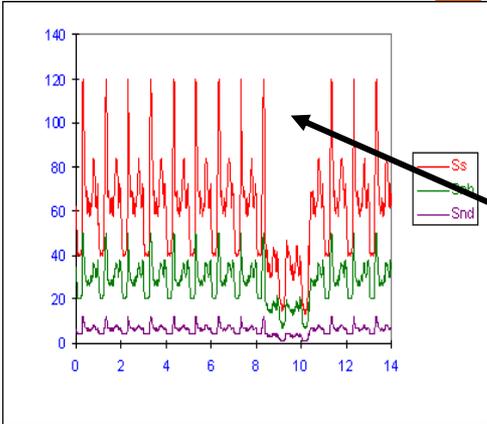
$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{F}(\xi, Y, U) \\ \hat{X} = \tilde{G}(\xi, Y, U) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

est un observateur pour (S) si $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \hat{X}(t)\| = 0$

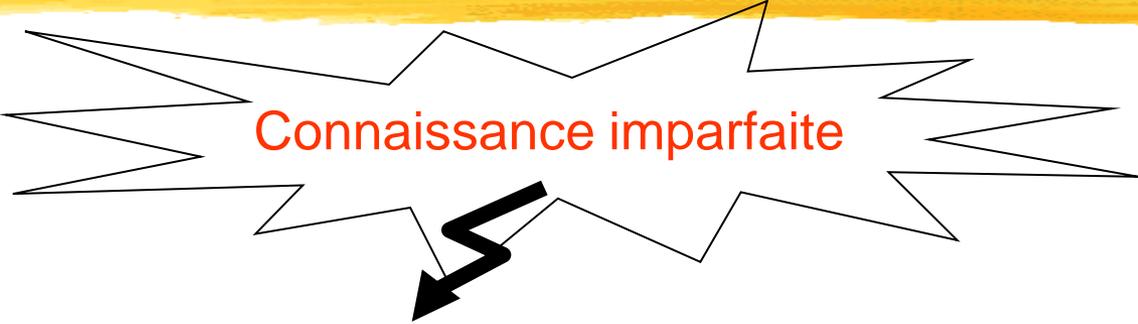
Problèmes d'observation



Débit (m³/j)



Concentrations (mg/l)



Mesure partielle des sorties



Estimations de variables non mesurées

Mesure des entrées

Problèmes d'observation

Observateurs de bioprocédés

$$\dot{x} = Kr + D(x_{in} - x)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

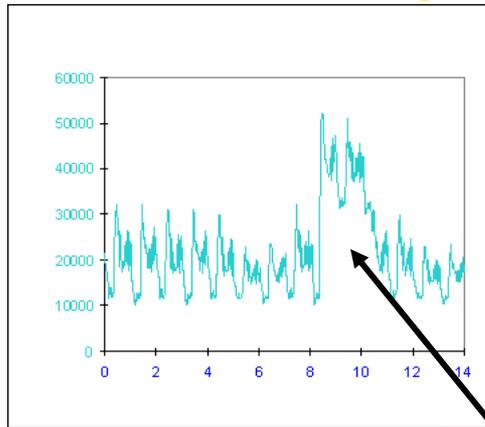
Observateurs asymptotiques

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_2 = -D(\hat{z}_2 - z_{2in}) \\ \hat{z}_2 \equiv \hat{z}_{20} \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_2 - Ax_1 \end{cases}$$

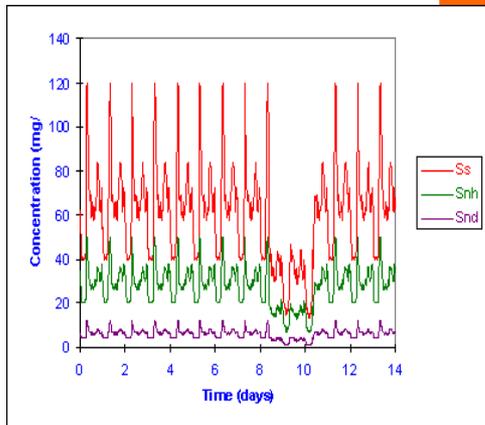


Nécessité de connaître les entrées

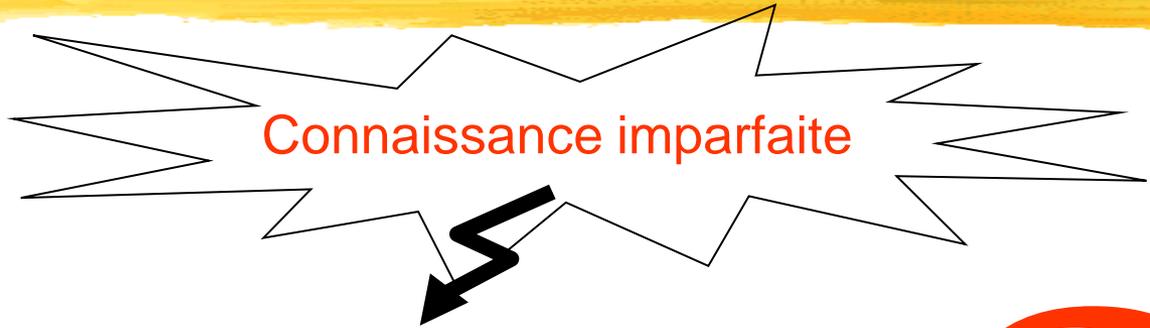
Problèmes d'observation



Débit (m³/j)

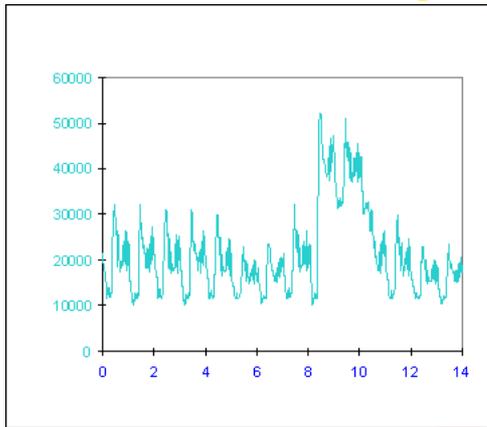


Concentrations (mg/l)

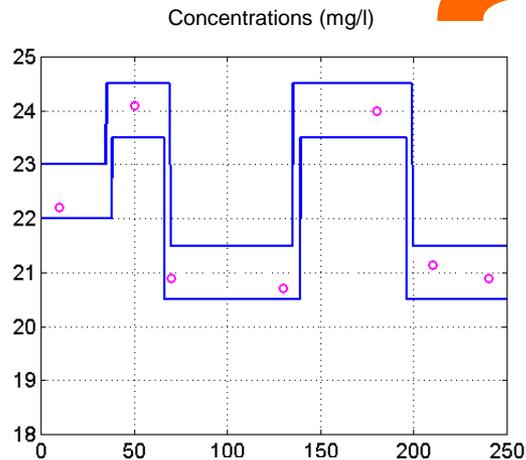


Mesure partielle des entrées

Problèmes d'observation



Débit (m³/j)

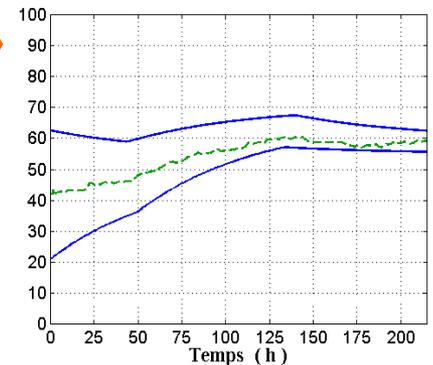


Concentrations (mg/l)

Connaissance imparfaite

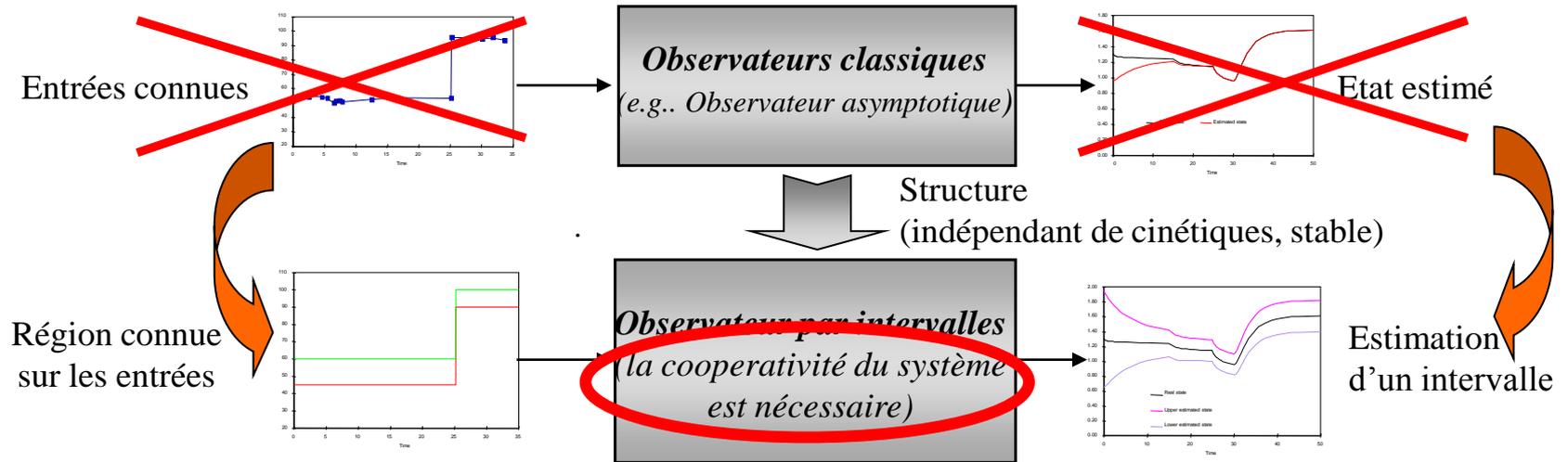


Mesure partielle des sorties



*Approche par intervalles
"garantis en tout temps"*

III. Contrôle robuste



Approche par intervalles

Observateurs asymptotiques et observateurs par intervalles

$$\dot{x} = Kr + D(x_{in} - x)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_2 = -D(\hat{z}_2 - z_{2in}) \\ \hat{z}_2(0) = \hat{z}_{20} \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_2 - Ax_1 \end{cases}$$

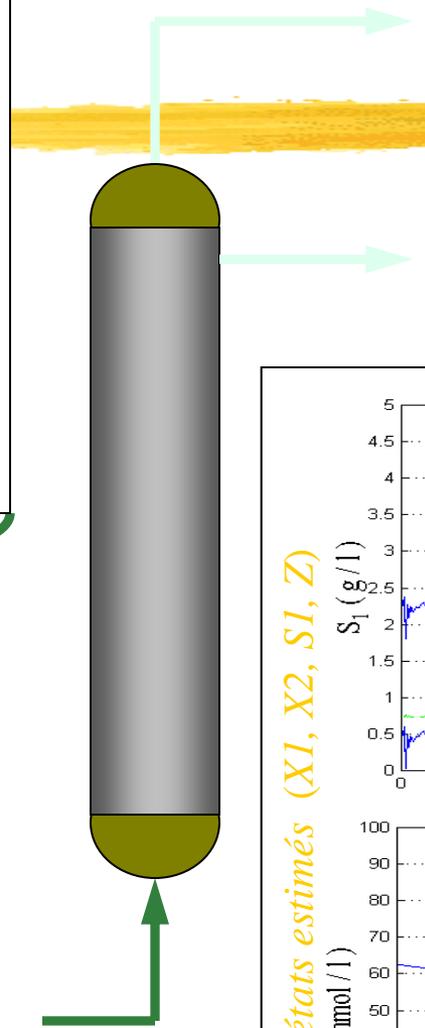
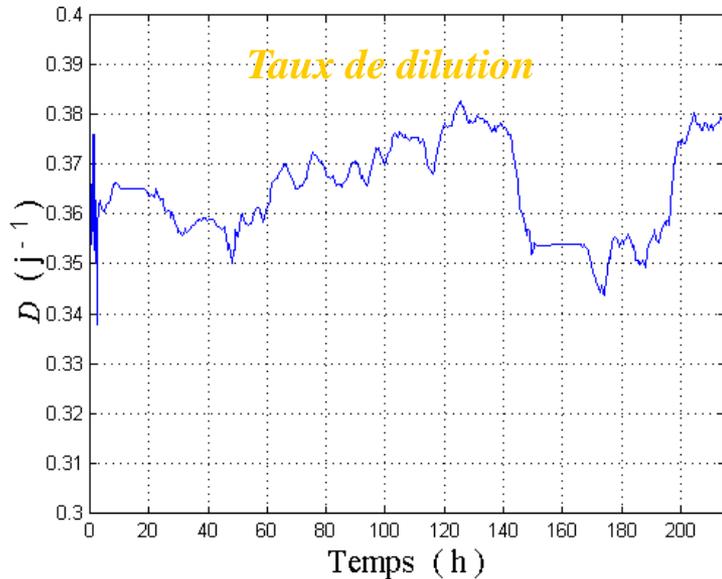
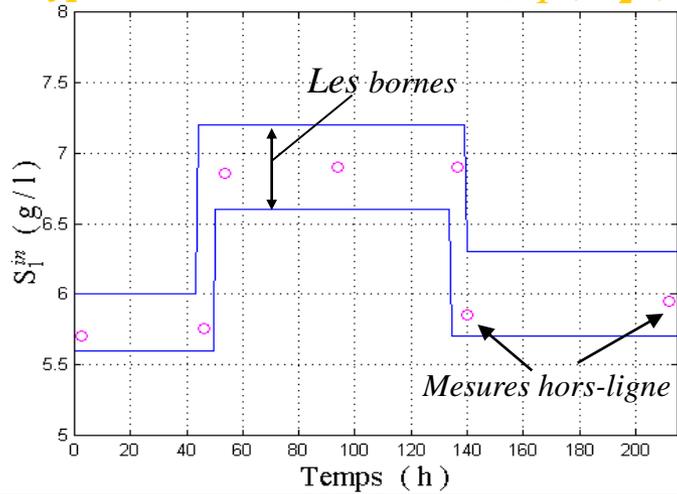
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_2^{\pm} = -D(\hat{z}_2^{\pm} - z_{2in}^{\pm}) \\ \hat{z}_{20}^- \leq z_{20} \leq \hat{z}_{20}^+ \\ \hat{x}_2^- \leq \hat{z}_2^- - Ax_1 \leq x_2 \leq \hat{x}_2^+ \leq \hat{z}_2^+ - Ax_1 \end{array} \right.$$

$$\hat{z}_{20}^- \leq z_{20} \leq \hat{z}_{20}^+$$

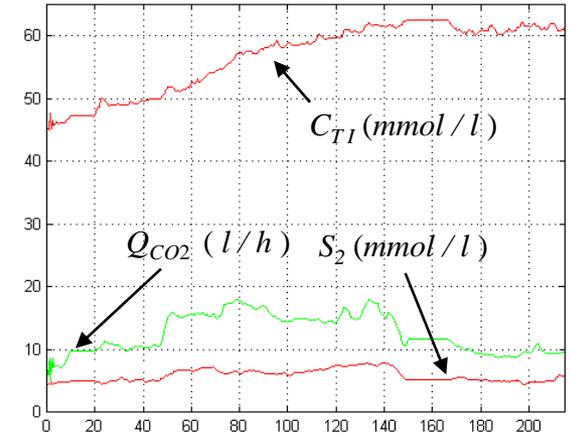
$$\hat{x}_2^- \leq \hat{z}_2^- - Ax_1 \leq x_2 \leq \hat{x}_2^+ \leq \hat{z}_2^+ - Ax_1$$

Observateurs par intervalles : résultats

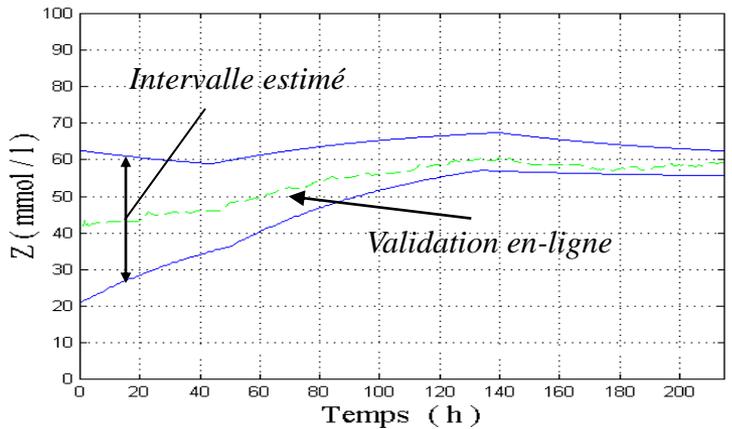
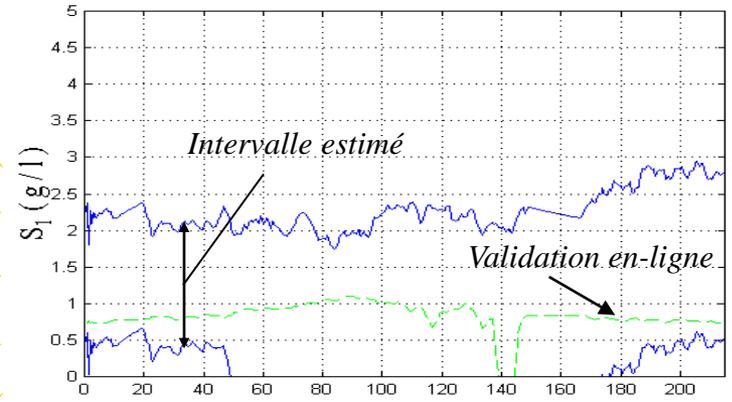
Les hypothèses sur les entrées (S_1^{in} , S_2^{in} , Z^{in})



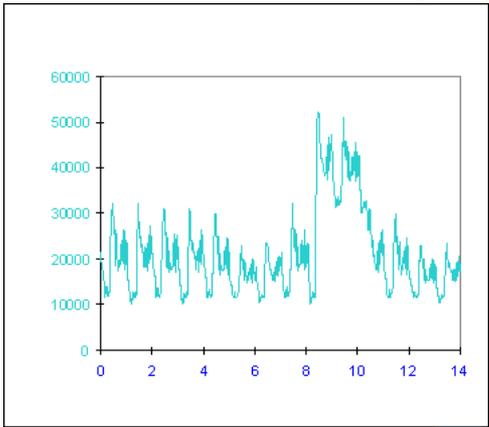
Les mesures en-ligne



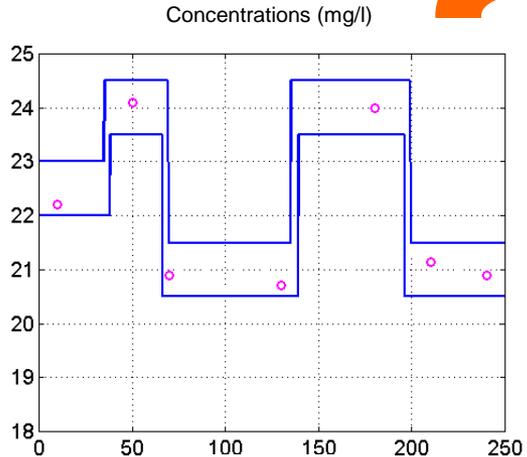
Les états estimés ($X1$, $X2$, $S1$, Z)



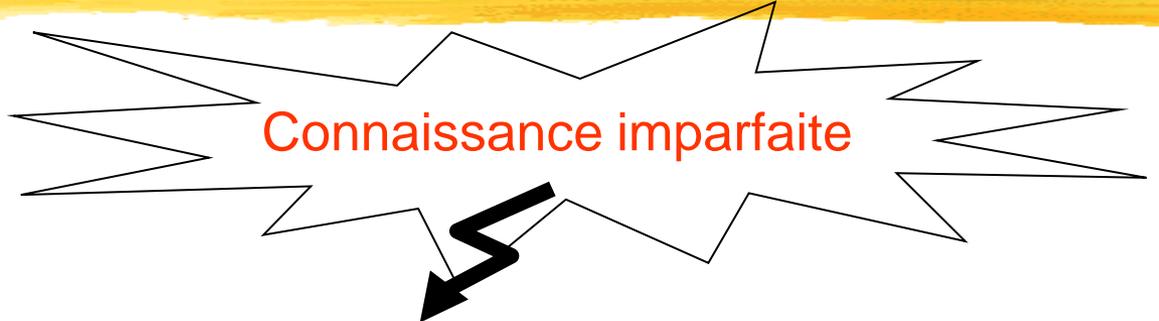
Contrôle robuste



Débit (m³/j)



Concentrations (mg/l)



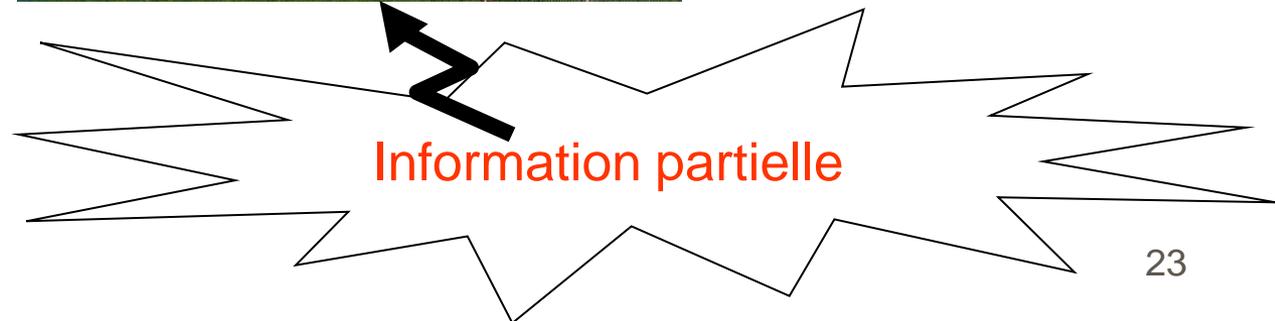
Connaissance imparfaite



Rejets < Normes

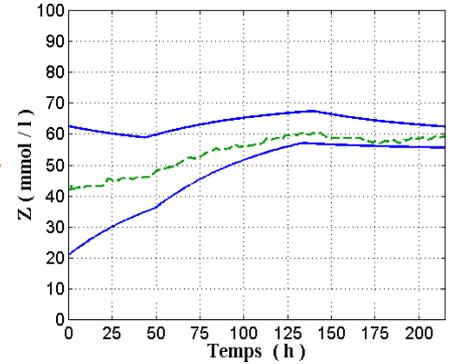
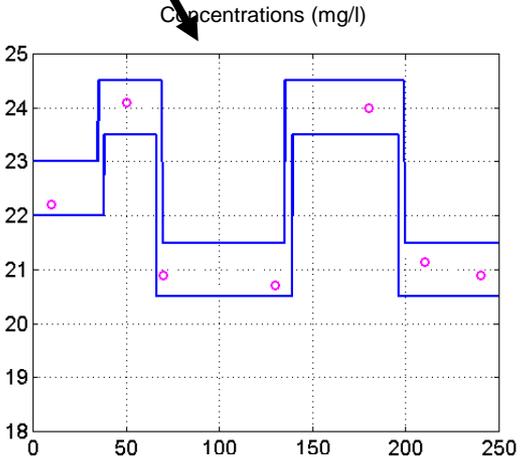
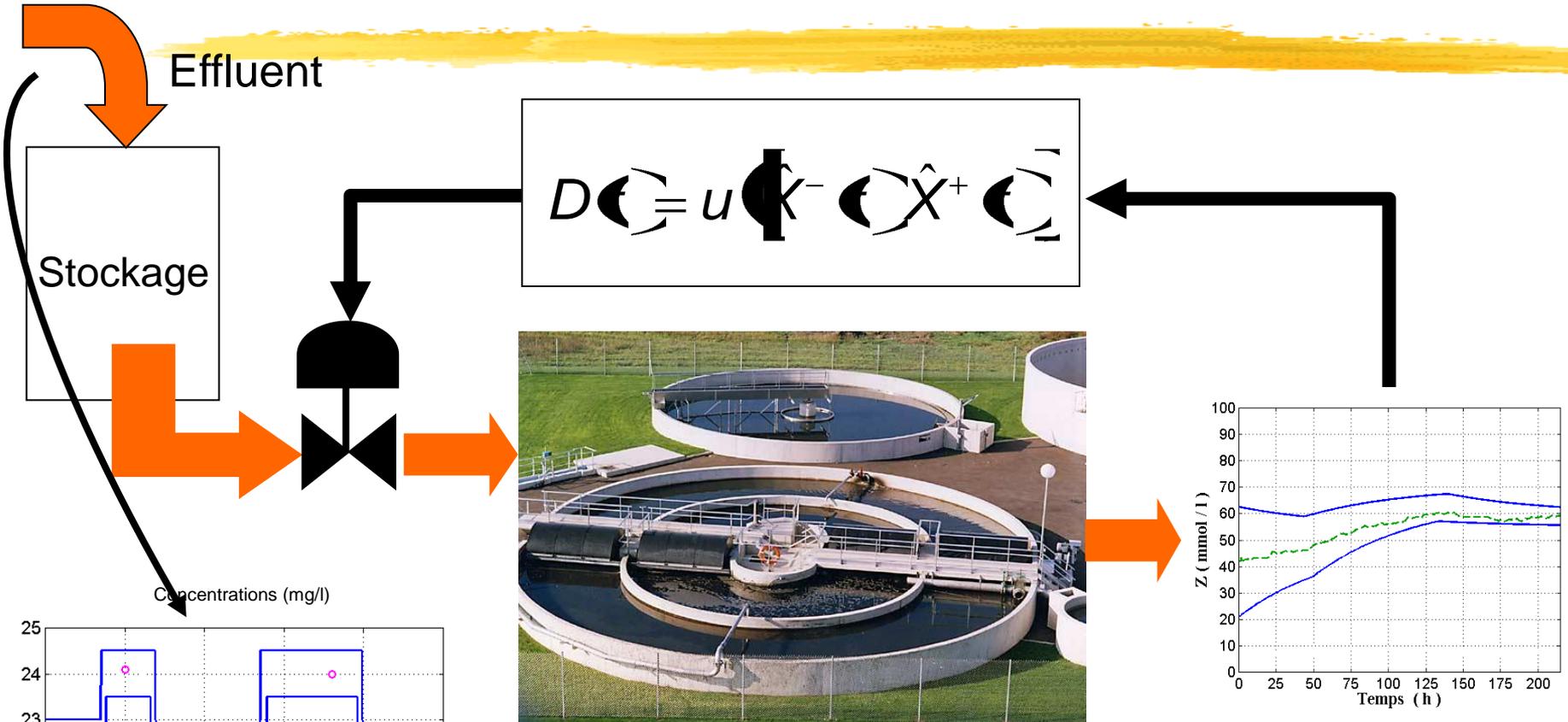


"Approche dans le pire des cas"



Information partielle

Contrôle robuste



Bornes sur les incertitudes

Proposition : contrôle robuste

La loi de commande :

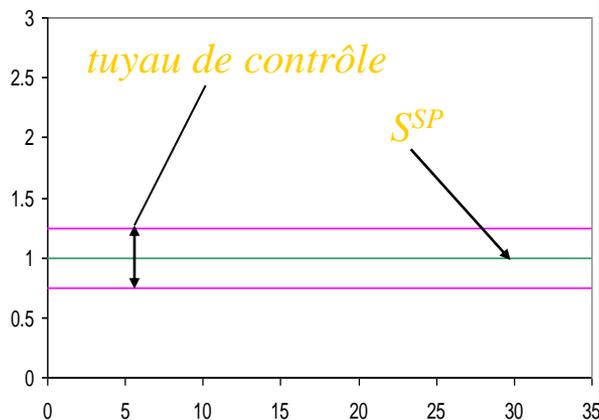
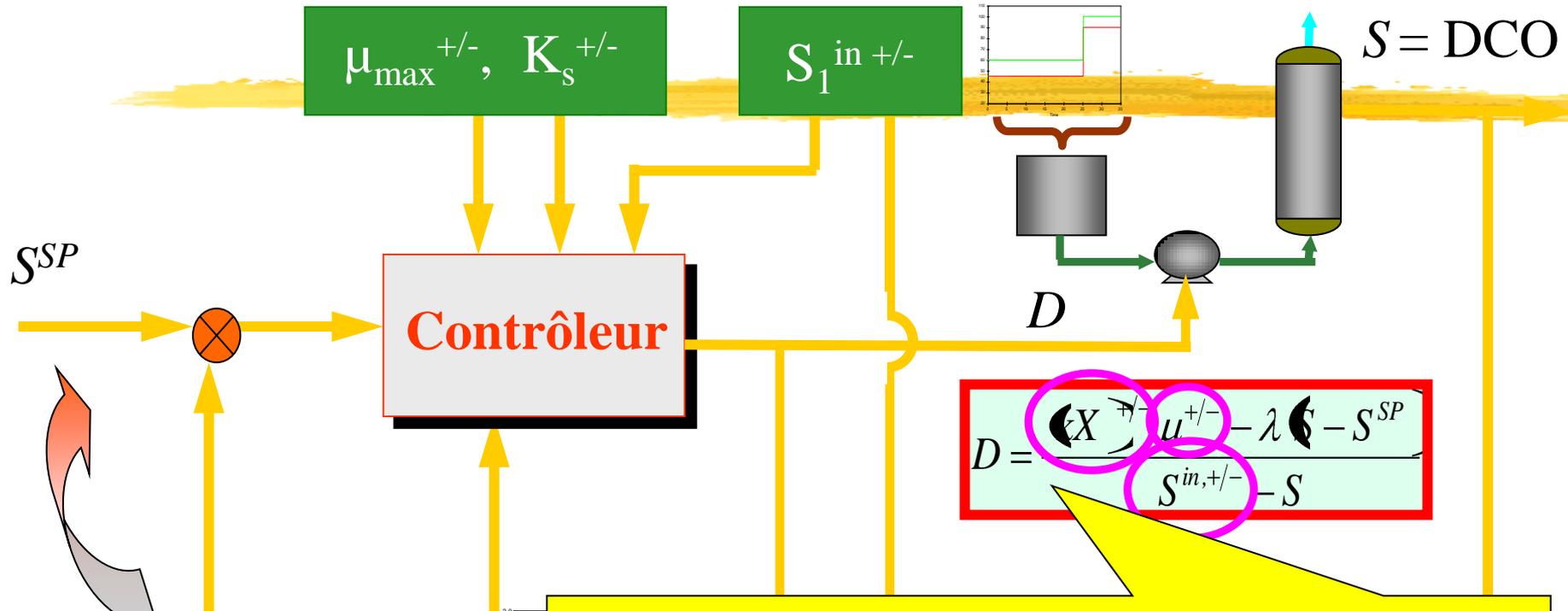
$$D(X, S) = \begin{cases} \frac{\frac{\mu^-(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S})}{(S_{in}^+ - S)} & \text{si } S \geq \bar{S} \\ \frac{\frac{\mu^+(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S})}{(S_{in}^- - S)} & \text{si } S < \bar{S} \end{cases}$$

garantit une convergence exponentielle de S vers \bar{S} en présence d'incertitudes sur μ et S_{in} .

Preuve : Considérons le cas $S \geq \bar{S}$. Introduisons la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = (S - \bar{S})\dot{S} \\ = (S - \bar{S}) \left(-\frac{\mu(S)X}{Y} + D(S_{in} - S) \right) \\ = (S - \bar{S}) \left(-\frac{\mu(S)X}{Y} + \left(\frac{\mu^-(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S}) \right) \left(\frac{S_{in} - S}{S_{in}^+ - S} \right) \right) \\ \leq (S - \bar{S}) \left(-\frac{\mu(S)X}{Y} + \frac{\mu^-(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S}) \right) \\ \leq -\lambda(S - \bar{S})^2 \end{array} \right.$$

De même, on montre que $\dot{V} \leq -\lambda(S - \bar{S})^2$ pour $S < \bar{S}$. ■

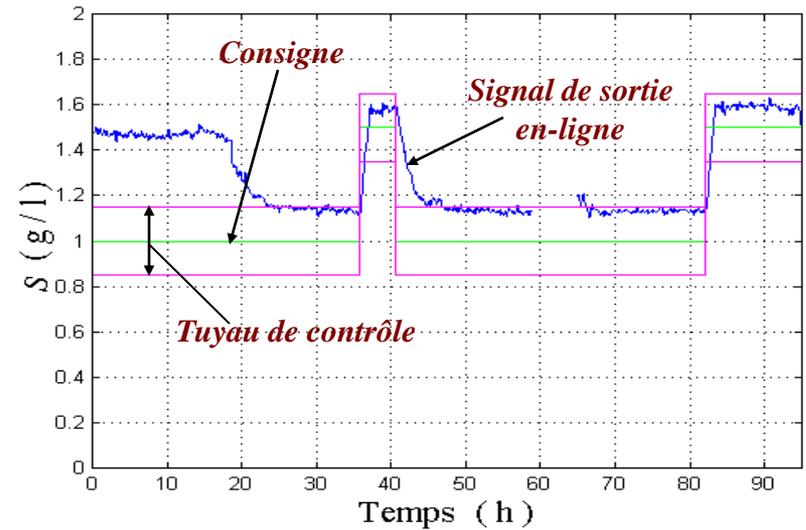
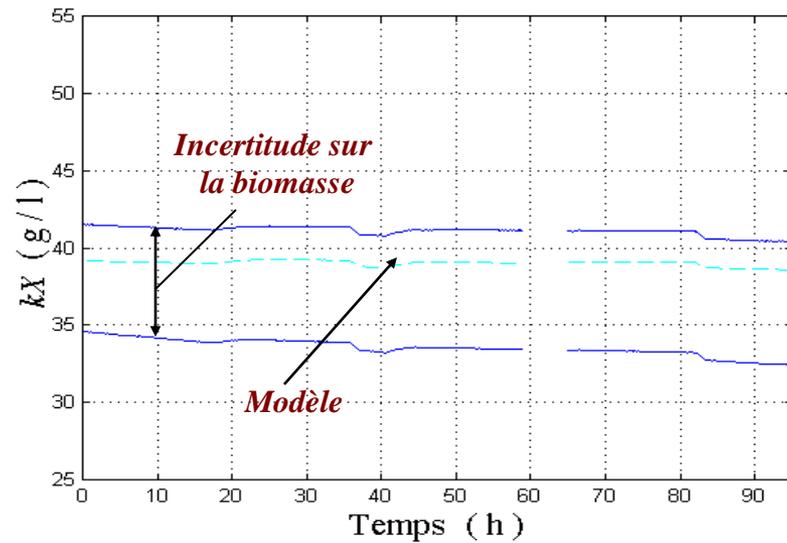
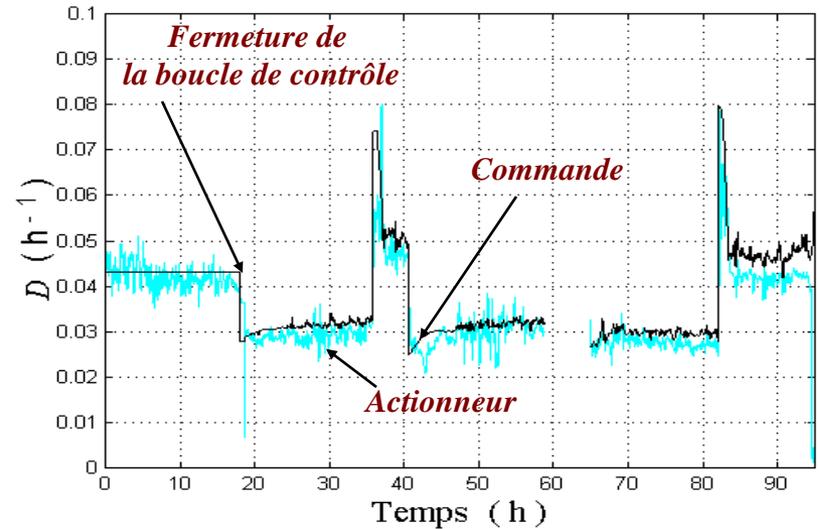
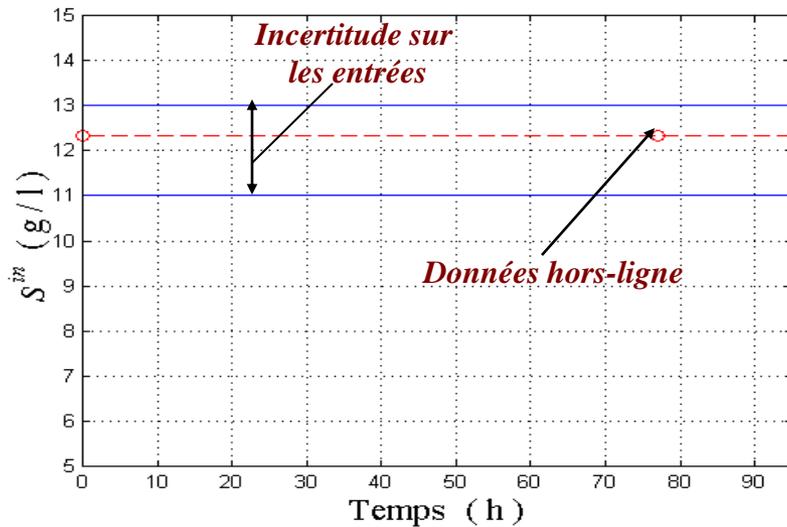


Stabilité pratique :

$$D_{\varepsilon}^* C = \begin{cases} D^{*1} C & \text{if } S \in]S^{SP} + \varepsilon, \infty[\\ D^{*1} C \frac{S - S^{SP} + \varepsilon}{2\varepsilon} + D^{*2} C \frac{S^{SP} + \varepsilon - S}{2\varepsilon} & \text{if } |S - S^{SP}| \leq \varepsilon \\ D^{*2} C & \text{if } S \in]-\infty, S^{SP} - \varepsilon[\end{cases}$$

Durée totale : 10 jours

Partie I : 0-95 h



Durée totale : 10 jours

Partie III : 145-243 h

