Un modèle mathématique de la prolifération du Typha

M.L. DIAGNE P.I. NDIAYE T. SARI M.T. NIANE

LANI-MISTEA-LMIA

Tlemcen, 08 février 2010

Plan

Problématique

- **Le Typha est une plante aquatique :**
  - Milieu de développement : fleuves, canaux, marigots, ceane etc....
  - Deux modes de reproductions : sexué et végétatif.

Problématique

- **Le Typha est une plante aquatique :**
  - Milieu de développement : fleuves, canaux, marigots, ceane etc....
  - Deux modes de reproductions : sexué et végétatif.
- **Le Typha est une plante envahissante :**
  - Colonisation de nouvelles zones
  - Faculté de diffusion trés loin

Problématique

Problèmes causés dans le Djoudj depuis 1986 :

- inaccéssibilité à l'eau
- perte de biodiversité
- occurrence fréquente de certaines maladies etc...

Problématique

Problèmes causés dans le Djoudj depuis 1986 :

- inaccéssibilité à l'eau
- perte de biodiversité
- occurrence fréquente de certaines maladies etc...

Utilités

•Utilités : fabrication de charbon, brins d'allumettes, de nattes etc...

Problématique

- **Moyens de luttes dans le Djoudj :**

  • Luttes mécaniques : dragage, facardage, fauchage, brulis, déracinage etc...

  • Lutte chimique : Traitement avec herbicides

Problématique

- **Moyens de luttes dans le Djoudj :**
  - Luttes mécaniques : dragage, facardage, fauchage, brulis, déracinage etc...
  - Lutte chimique : Traitement avec herbicides
- **Limites des moyens de luttes :**
  - inefficacité des traitements
  - grand coût financier
  - indisponibilté des produits chimiques

Problématique

Nécessité d'une nouvelle approche de lutte : Ecohydrologie

- comprendre sa dynamique de prolifération et de la contrôler suivant une approche optimale.

Problématique

Nécessité d'une nouvelle approche de lutte : Ecohydrologie

- comprendre sa dynamique de prolifération et de la contrôler suivant une approche optimale.
- Approche de lutte proposée en Décembre 2006 par l'UNESCO « Application de l'Ecohydrologie à la lutte contre le Typha dans le PNOD»

Problématique

Nécessité d'une nouvelle approche de lutte : Ecohydrologie

- comprendre sa dynamique de prolifération et de la contrôler suivant une approche optimale.
- Approche de lutte proposée en Décembre 2006 par l'UNESCO « Application de l'Ecohydrologie à la lutte contre le Typha dans le PNOD»

Qu'est-ce que l'écohydrologie

Problématique

Nécessité d'une nouvelle approche de lutte : Ecohydrologie

- comprendre sa dynamique de prolifération et de la contrôler suivant une approche optimale.
- Approche de lutte proposée en Décembre 2006 par l'UNESCO « Application de l'Ecohydrologie à la lutte contre le Typha dans le PNOD»

Qu'est-ce que l'écohydrologie

Définition

association de deux sciences : l'écologie et l'hydrologie.

Problématique

Nécessité d'une nouvelle approche de lutte : Ecohydrologie

- comprendre sa dynamique de prolifération et de la contrôler suivant une approche optimale.
- Approche de lutte proposée en Décembre 2006 par l'UNESCO « Application de l'Ecohydrologie à la lutte contre le Typha dans le PNOD»

Qu'est-ce que l'écohydrologie

Définition
association de deux sciences : l'écologie et l'hydrologie.
But
étude des interaction mutuelle entre le cycle hydrologique et les écosystèmes pour la préservation des écosystémes.

Problématique

Objectif du travail

Modélisation, étude mathématique et contrôle selon l'approche écohydrologique.

Objectif de modélisation

Objectif de modélisation

- Définir le role de chacun des deux types de reproduction sur la prolifération du typha

Modélisation Mathématique

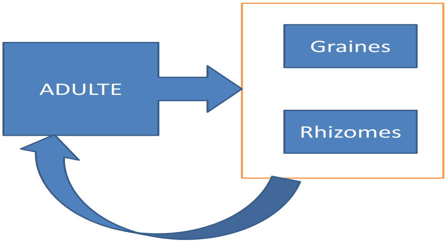

Fig 3 : Cycle de reproduction du *Typha*.

Modélisation Mathématique

- schéma du modèle du cycle de reproduction

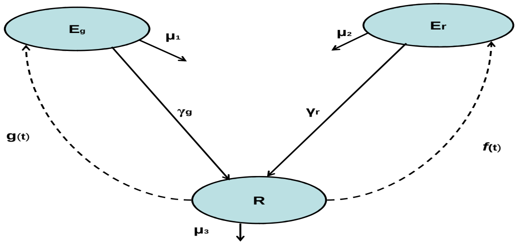

Fig 4 : schéma du modèle du cycle de reproduction.

Hypothése de modélisation

Hypothéses

- *Ω un espace admissible pour le développement de la plante au voisinage d'un ouvrage.*

Hypothése de modélisation

Hypothéses

- Ω *un espace admissible pour le développement de la plante au voisinage d'un ouvrage.*
- *K la capacité biotique, i.e, le nombre maximal de Typha que peut contenir Ω*

Hypothése de modélisation

Hypothéses

- Ω *un espace admissible pour le développement de la plante au voisinage d'un ouvrage.*
- K *la capacité biotique, i.e, le nombre maximal de Typha que peut contenir* Ω
- les deux fonctions de reproduction
  - $g(t)$: la fonction de reproduction sexuée
  - $f(t)$: la fonction de reproduction végétative .

Modélisation Mathématique

Equation du modèle :

$$\begin{cases} \dot{E}_g = c_g A(1 - \frac{X}{K}) - (\gamma_g + \mu_g) E_g \\ \dot{E}_r = c_r A(1 - \frac{X}{K}) - (\gamma_r + \mu_r) E_r \\ \dot{A} = \gamma_r E_r + \gamma_g E_g - \mu A \end{cases}$$

Avec $X(t) = E_g(t) + E_r(t) + A(t)$.

Modélisation Mathématique

Systéme de adimensionnel :

$$\begin{cases} \dot{e_g} = c_g a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e_r} = c_r a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \quad (1)$$

avec

$$c_g(t) = \begin{cases} c_g & \text{si } t \in [0, \alpha T[\\ 0 & \text{si } t \in [\alpha T, T[\end{cases}$$

où αT, $0 \leq \alpha \leq 1$, est la fraction de l'année pendant laquelle il y a une reproduction sexuée.

modèle mathématique et biologique bien posé

On considère ce système dans le domaine

$$\Omega = \{(e_g, e_r, a) \in \mathbb{R}^3_+, \quad e_g + e_r + a \leq 1\}$$

Proposition

Le domaine Ω est positivement invariant pour le système (1).

Preuve. On a les implications suivantes

$$e_g = 0 \Rightarrow \dot{e_g} = c_g(t)a(1 - e_r - a) \geq 0 \qquad \text{si } e_r + a \leq 1$$
$$e_r = 0 \Rightarrow \dot{e_r} = c_r a(1 - e_g - a) \geq 0 \qquad \text{si } e_g + a \leq 1$$
$$a = 0 \Rightarrow \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g \geq 0$$
$$x = 1 \Rightarrow \dot{x} = -\mu_g e_g - \mu_r e_r - \mu a \leq 0$$

Donc Ω est positivement invariant

Equilibres du modèle et leur stabilité

$$c_g(t) = \begin{cases} c_g & \text{si } t \in [0, \alpha T[\\ 0 & \text{si } t \in [\alpha T, T[\end{cases}$$

Deux évolutions possibles

Première mode

$$\begin{cases} \dot{e_g} = c_g a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e_r} = c_r a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \tag{2}$$

Deuxième mode

$$\begin{cases} \dot{e_g} = -(\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e_r} = c_r a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \tag{3}$$

On définit ainsi les taux de reproduction de base :

$$\lambda_g = \frac{c_g \gamma_g}{\mu(\gamma_g + \mu_g)}, \qquad \lambda_r = \frac{c_r \gamma_r}{\mu(\gamma_r + \mu_r)}$$

comme étant le nombre moyen de jeunes pousses provenant des reproductions sexuée et asexuée respéctivement produit par un typha durant sa phase reproductive. Notons

$\lambda = \lambda_g + \lambda_r$.

Analyse locale du sous système 2

Proposition

Si $\lambda \leq 1$, il existe un unique point équilibre $E_0 = (0,0,0)$ qui est exponentiellement stable si et seulement si $\lambda < 1$. Si $\lambda > 1$, il existe deux points d'équilibres pour le système (2) : l'équilibre trivial E_0 qui est instable et l'équilibre non trivial $E_3 = (e_g^*, e_r^*, a^*)$ avec

$$e_g^* = \frac{c_g\mu(\gamma_r+\mu_r)}{c_g(\gamma_g+\mu)(\gamma_r+\mu_r)+c_r(\gamma_r+\mu)(\gamma_g+\mu_g)}\frac{\lambda-1}{\lambda}$$

$$e_r^* = \frac{c_r\mu(\gamma_g+\mu_g)}{c_g(\gamma_g+\mu)(\gamma_r+\mu_r)+c_r(\gamma_r+\mu)(\gamma_g+\mu_g)}\frac{\lambda-1}{\lambda}$$

$$a^* = \frac{\mu(\gamma_g+\mu_g)(\gamma_r+\mu_r)}{c_g(\gamma_g+\mu)(\gamma_r+\mu_r)+c_r(\gamma_r+\mu)(\gamma_g+\mu_g)}(\lambda-1)$$

Analyse locale du sous système 3

Proposition

Si $\lambda_r \leq 1$*, il existe un unique point équilibre* $E_0 = (0,0,0)$ *qui est exponentiellement stable si et seulement si* $\lambda_r < 1$*. Si* $\lambda_r > 1$*, il existe deux points d'équilibres pour le système (3) : l'équilibre trivial* E_0 *qui est instable et l'équilibre non trivial* $E_2 = (0, e_r^*, a^*)$ *avec*

$$e_r^* = \frac{\mu}{\gamma_r + \mu}\frac{\lambda_r - 1}{\lambda_r}, \qquad a^* = \frac{\gamma_r}{\gamma_r + \mu}\frac{\lambda_r - 1}{\lambda_r}$$

qui est asymptotiquement stable.

Analyse globale du sous système 2

Proposition

Si $\lambda \leq 1$, il existe un unique point équilibre $E_0 = (0,0,0)$ qui est globalement asymptotiquement stable si et seulement si $\lambda < 1$.

Preuve. On considère cette fonction de Lyapunov

$$V = \gamma_g(\gamma_r + \mu_r)e_g + \gamma_r(\gamma_g + \mu_g)e_r + (\gamma_g + \mu_g)(\gamma_r + \mu_r)a$$

Analyse globale du sous système 3

Proposition

Si $\lambda_r \leq 1$, il existe un unique point équilibre $E_0 = (0,0,0)$ qui est globalement asymptotiquement stable si et seulement si $\lambda_r < 1$.

Preuve. On considère cette fonction de Lyapunov

$$V = \gamma_g(\gamma_r + \mu_r)e_g + \gamma_r(\gamma_g + \mu_g)e_r + (\gamma_g + \mu_g)(\gamma_r + \mu_r)a$$

Stabilitè du système à commutation

La stabilitè asymptotique de chacun des sous-systèmes ne suffit pas à garantir la stabilitè uniforme d'un système à commutation

On définit ainsi $\lambda(t) = \dfrac{c_g(t)\gamma_g}{\mu(\gamma_g + \mu_g)} + \dfrac{c_r\gamma_r}{\mu(\gamma_r + \mu_r)}$

Proposition

Si $\lambda(t) \leq 1$, le système 1. est uniformèment stable

Interprétation. L'existence d'une fonction de Lyapunov commune

$$V = \gamma_g(\gamma_r + \mu_r)e_g + \gamma_r(\gamma_g + \mu_g)e_r + (\gamma_g + \mu_g)(\gamma_r + \mu_r)a$$

Simulation d'une situation $\alpha T = 8$ mois

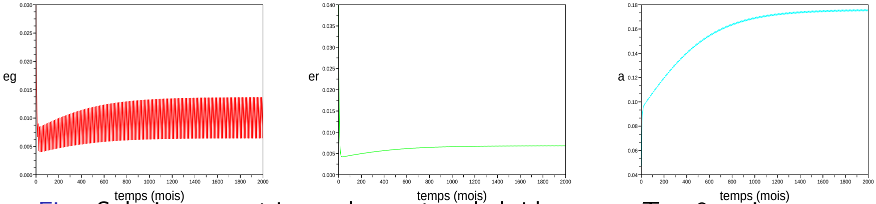

Fig.: Solutions numériques du système hybride pour $\alpha T = 8$ mois.

Simulation d'une situation $\alpha T = 4$ mois

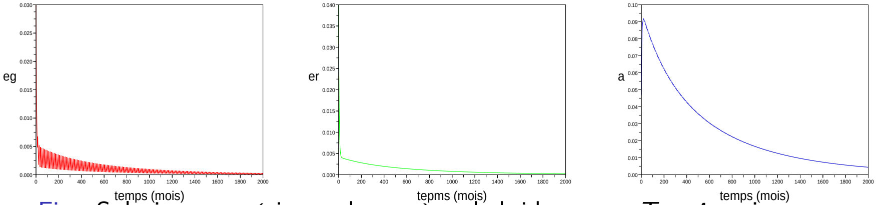

Fig.: Solutions numériques du système hybride pour $\alpha T = 4$ mois.

1. Problématique
2. Modélisation mathématique
3. Etude mathèmatique
4. Simulations
5. Conclusions

Conclusion

• Elaboration d'un modèle mathématique par une système hybride
• Mise en évidence des deux taux de reproduction de base notés λ_g et λ_r
•Mise en évidence $\lambda = \lambda_g + \lambda_r$ qui caractérise complètement l'existence et la stabilité de l'équilibre positif.
• Comportement assez complexe du système hybride par des simulations
• La stabilité du système hybride composé de deux sous sytèmes l'une stable et l'autre instable dépend aussi de αT