

Analyse de modèles de digestion anaérobie

Y. DAOUD

UTM - ENIT (LAMSIN) & UM (I2S)

avec

N. ABDELLATIF & J. HARMAND

Séminaire TREASURE

12-16 Octobre 2015

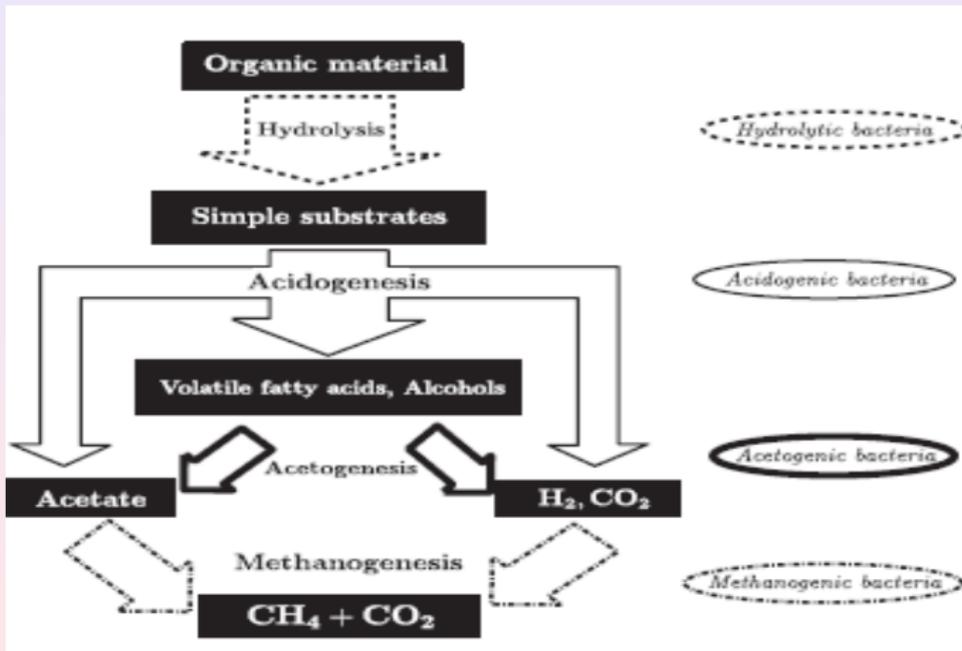


PLAN

- 1 Les étapes de la digestion anaérobie
- 2 Le modèle de la D.A. en ajoutant l'étape d'hydrolyse
- 3 L'analyse de modèles de la D.A avec et sans inhibition
- 4 Le taux de biogaz produit pour les modèles avec et sans inhibition
- 5 Perspectives

- 1 Les étapes de la digestion anaérobie
- 2 Le modèle complet de la D.A.en ajoutant l'étape d'hydrolyse
- 3 L'analyse de modèles de la D.A
- 4 Le taux de biogaz produit pour les modèles avec et sans inhibition
- 5 Perspectives

LES ÉTAPES DE LA DIGESTION ANAÉROBIE



- **Hydrolyse** : Les molécules organiques complexes (X_0) sont décomposées en substrat simple (S).
- **Acidogénèse** : Les bactéries acidogènes (X_S) convertissent le substrat en acide acétique (A), acide gras volatile "AGV" (V), alcools, hydrogène (H) et dioxyde de carbone.
- **Acétogénèse** : Les AGV et l'alcool sont utilisés par les bactéries acétogènes (X_V) et ils sont convertis en acide acétique, en dioxyde de carbone et hydrogène.
- **Méthanogénèse** : Les bactéries méthanogènes acétoclastiques (X_A) convertissent l'acide acétique en méthane et en dioxyde de carbone, tandis que les bactéries méthanogènes hydrogénéotrophes (X_H) convertissent l'hydrogène et le dioxyde de carbone en méthane.

- 1 Les étapes de la digestion anaérobie
- 2 Le modèle complet de la D.A.en ajoutant l'étape d'hydrolyse**
- 3 L'analyse de modèles de la D.A
- 4 Le taux de biogaz produit pour les modèles avec et sans inhibition
- 5 Perspectives

- Weederman et al. ont considéré un modèle décrivant : l'acidogenèse, l'acétogenèse et la méthanogenèse
l'hydrolyse : phase préliminaire au processus.
- L'étude combine et étend des résultats sur les deux sous-modèles :
 - Hess et Bernard (2008) : acidogenèse et la méthanogenèse
 - de Hajji et al. (2010) : acétogenèse et méthanogenèse hydrogénétrrophe.
- Inhibition par un certain nombre de facteurs.
 - l'inhibition de la croissance microbienne des bactéries acétogènes par l'hydrogène
 - l'inhibition de la croissance microbienne des bactéries méthanogènes hydrogénétrrophes par l'acétate.

M. Weedermann, G. Seo and G.S.K. Wolkowicz, (2013), *Mathematical model of anaerobic digestion in a chemostat : effects of syntrophy and inhibition*; *Journal of Biological Dynamics*, 7(1), pp 59-85.

MODÈLE AVEC INHIBITION :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - k_{hyd}X_0 \\
 \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s}g_S(S)X_S + k_0k_{hyd}X_0 \\
 \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D)X_S \\
 \frac{dV}{dt} = -DV + \gamma_{sv}g_S(S)X_S - \frac{1}{c_v}g_V(V, H)X_V \\
 \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V, H) - D)X_V \\
 \frac{dA}{dt} = -DA + \gamma_{sa}g_S(S)X_S + \gamma_{va}g_V(V, H)X_V - \frac{1}{c_a}g_A(A)X_A \\
 \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D)X_A \\
 \frac{dH}{dt} = -DH + \gamma_{sh}g_S(S)X_S + \gamma_{vh}g_V(V, H)X_V - \frac{1}{c_h}g_H(H, A)X_H \\
 \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H, A) - D)X_H.
 \end{array} \right. \quad (1)$$

- X_{0in} et S_{in} sont les concentrations du substrat à l'entrée du chemostat
- D est le taux de dilution
- k_{hyd} , k_0 , c_s , c_v , c_a , c_h , γ_{sv} , γ_{sa} , γ_{sh} , γ_{va} , γ_{vh} sont les paramètres du modèle.

Pour $l = S, V, A$ et H , $g_l(\cdot)$ sont les taux de croissance des bactéries.

- (H1) $g_S(0) = 0$, $g'_S(S) > 0$ pour $S > 0$.
- (H2) Pour $A \geq 0$ et $H \geq 0$, $g_V(0, H) = 0$ et $\frac{\partial g_V}{\partial V}(V, H) > 0$.
- (H3) Pour $A \geq 0$ et $H \geq 0$, $g_V(V, 0) > 0$, $\frac{\partial g_V}{\partial H}(V, H) < 0$,
 $\lim_{H \rightarrow +\infty} g_V(V, H) = 0$.
- (H4) $g_A(0) = 0$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} g_A(A) = 0$, et il existe une constante
 $A_{max} > 0$, $g_A(A) > 0$ pour $0 < A < A_{max}$ et $g_A(A) < 0$ pour
 $A > A_{max}$.
- (H5) Pour $A \geq 0$ et $H \geq 0$, $g_H(0, A) = 0$, $\frac{\partial g_H}{\partial H}(H, A) > 0$.
- (H6) For $A \geq 0$ et $H \geq 0$, $g_H(H, 0) > 0$, $\frac{\partial g_V}{\partial A}(H, A) < 0$,
 $\lim_{A \rightarrow +\infty} g_H(H, A) = 0$.

MODÈLE SANS INHIBITION :

On ne tient pas compte des effets inhibiteurs : On suppose que g_A est croissante et $g_A(0) = 0$. $g_V(V)$ et $g_H(H)$ correspondent à $g_V(V, 0)$ et à $g_H(H, 0)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - k_{hyd}X_0 \\ \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s}g_S(S)X_S + k_0k_{hyd}X_0 \\ \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D)X_S \\ \\ \frac{dV}{dt} = -DV + \gamma_{sv}g_S(S)X_S - \frac{1}{c_v}g_V(V)X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V) - D)X_V \\ \\ \frac{dA}{dt} = -DA + \gamma_{sa}g_S(S)X_S + \gamma_{va}g_V(V)X_V - \frac{1}{c_a}g_A(A)X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D)X_A \\ \\ \frac{dH}{dt} = -DH + \gamma_{sh}g_S(S)X_S + \gamma_{vh}g_V(V)X_V - \frac{1}{c_h}g_H(H)X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H) - D)X_H. \end{array} \right. \quad (2)$$

- 1 Les étapes de la digestion anaérobie
- 2 Le modèle complet de la D.A.en ajoutant l'étape d'hydrolyse
- 3 L'analyse de modèles de la D.A**
- 4 Le taux de biogaz produit pour les modèles avec et sans inhibition
- 5 Perspectives

ANALYSE DU MODÈLE :

Proposition

Pour des valeurs initiales *positives*, les solutions du système (1) et (2) restent *positives et bornées* pour tout $t \geq 0$.

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = DX_{0in} - (D + k_{hyd})X_0 \\ \frac{dY}{dt} = F(Y, X_0). \end{cases} \quad (3)$$

avec

$$Y = (S, X_S, V, X_V, A, X_A, H, X_H)$$

Si $Z = (Y, X_0)$, le modèle de Weederman et al. s'écrit

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z, 0).$$

Le système (2) possède neuf points d'équilibre :

Équilibre	X_0	S	X_S	V	X_V	A	X_A	H	X_H
E_I	X_0^*	S_{in}^*	0	0	0	0	0	0	0
E_0	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	$H^{(0)}$	0
E_H	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	λ_H	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H)$
E_A	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A)$	$H^{(0)}$	0
E_{AH}	X_0^*	λ_S	X_S^*	$V^{(0)}$	0	λ_A	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A)$	λ_H	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H)$
E_V	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	\bar{A}	0	\bar{H}	0
E_{VH}	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	\bar{A}	0	λ_H	$c_h(\bar{H} - \lambda_H)$
E_{VA}	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	λ_A	$c_a(\bar{A} - \lambda_A)$	\bar{H}	0
E_*	X_0^*	λ_S	X_S^*	λ_V	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$	λ_A	$c_a(\bar{A} - \lambda_A)$	λ_H	$c_h(\bar{H} - \lambda_H)$

avec

$$\bullet X_0^* = \left(\frac{D}{D+k_{hyd}}\right)X_{0in}, S_{in}^* = \left(\frac{k_0 k_{hyd}}{D+k_{hyd}}\right)X_{0in} + S_{in},$$

$$X_S^* = c_s(S_{in}^* - \lambda_S)$$

$$\bullet V^{(0)} = \gamma_{sv}X_S^*, A^{(0)} = \gamma_{sa}X_S^*, H^{(0)} = \gamma_{sh}X_S^*$$

$$\bullet \bar{A} = A^{(0)} + \gamma_{va}c_v(V^{(0)} - \lambda_V), \bar{H} = H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v(V^{(0)} - \lambda_V)$$

• Pour $l = S, V, A$ et H , la fonction $g_l(l)$ est telle que :

$$g_l(0) = 0 \quad \text{et} \quad g_l'(l) > 0.$$

On note λ_l la valeur de l telle que :

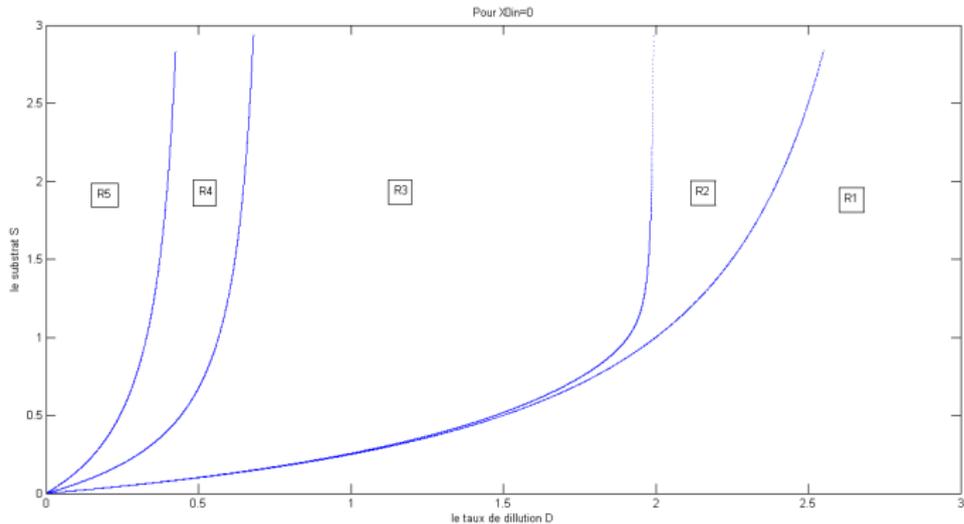
$$g_l(\lambda_l) = D \Leftrightarrow \lambda_l = g_l^{-1}(D)$$

CONDITIONS D'EXISTENCE :

Equilibres	Conditions d'existence
E_l	toujours
E_0	$S_{in}^* > \lambda_S$
E_H	$H^{(0)} > \lambda_H$
E_A	$A^{(0)} > \lambda_A$
E_{AH}	$A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$
E_V	$V^{(0)} > \lambda_V$
E_{VH}	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\overline{H} > \lambda_H$
E_{VA}	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\overline{A} > \lambda_A$
E_*	$V^{(0)} > \lambda_V$, $\overline{A} > \lambda_A$ et $\overline{H} > \lambda_H$

CONDITIONS DE STABILITÉ

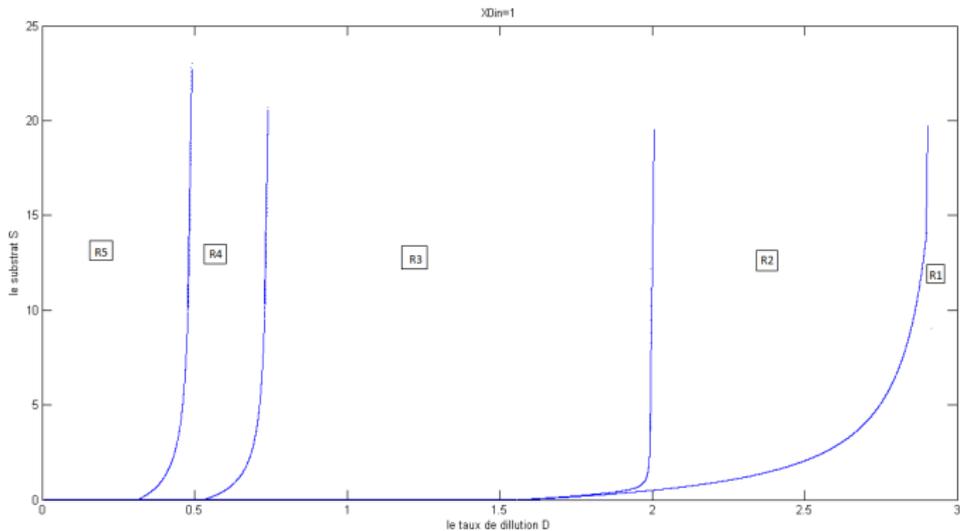
Equilibres	Conditions d'existence	Conditions de Stabilité
E_l	toujours	$S_{in}^* < \lambda_S$
E_0	$S_{in}^* > \lambda_S$	$A^{(0)} < \lambda_A$, $H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
E_H	$H^{(0)} > \lambda_H$	$A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
E_A	$A^{(0)} > \lambda_A$	$H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
E_{AH}	$A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$	$V^{(0)} < \lambda_V$
E_V	$V^{(0)} > \lambda_V$	$\bar{A} < \lambda_A$ et $\bar{H} < \lambda_H$
E_{VH}	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\bar{H} > \lambda_H$	$\bar{A} < \lambda_A$
E_{VA}	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\bar{A} > \lambda_A$	$\bar{H} < \lambda_H$
E_*	$V^{(0)} > \lambda_V$, $\bar{A} > \lambda_A$ et $\bar{H} > \lambda_H$	Lorsqu'il existe

RÉGION DE STABILITÉ POUR $X_{0in} = 0$:

RÉSUMÉ :

Condition	Région	E_I	E_0	E_H	E_A	E_{AH}	E_V	E_{VH}	E_{VA}	E_*
$S_{in}^* < \lambda_S$	R^1	S								
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} < \lambda_H,$ $A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$	R^2	I	S							
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} > \lambda_H,$ $A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$	R^3	I	I	S						
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} > \lambda_H,$ $A^{(0)} > \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$	R^4	I	I	I	I	S				
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} > \lambda_H,$ $A^{(0)} > \lambda_A$ et $V^{(0)} > \lambda_V$	R^5	I	I	I	I	I	I	I	I	S

RÉGION DE STABILITÉ POUR $X_{0in} = 1$:



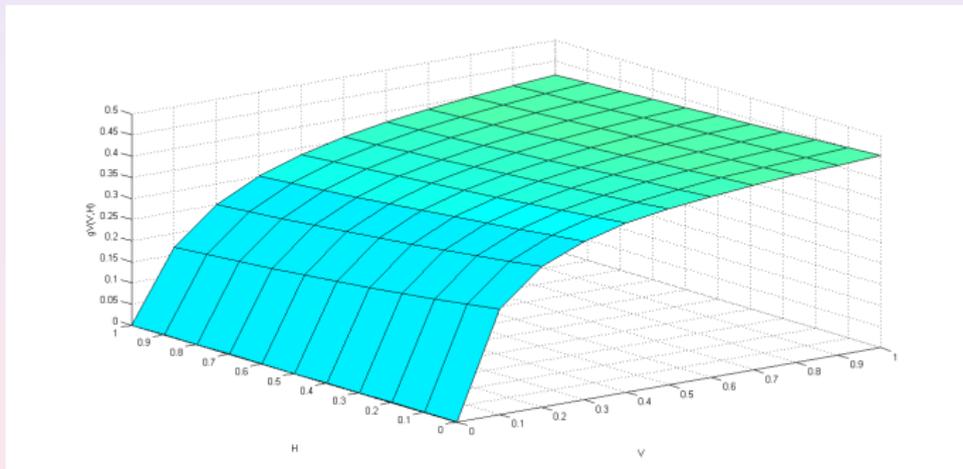
ANALYSE DU MODÈLE AVEC INHIBITION :

- Si $X_S^* = 0$ alors $V^*, X_V^*, A^*, X_A^*, H^*$ et X_H^* sont nuls.
- Si $X_S^* > 0$ alors $X_0^* = \left(\frac{D}{D+k_{hyd}}\right)X_{0in}$, $S^* = \lambda_S$ et $X_S^* = c_s(S_{in}^* - \lambda_S)$.

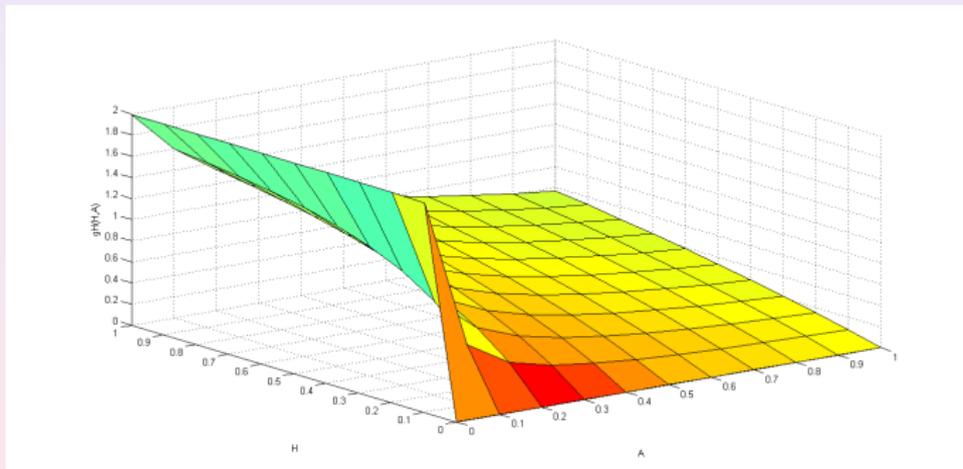
Le modèle avec inhibition devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = D(V^{(0)} - V) - \frac{1}{c_v} g_V(V, H) X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V, H) - D) X_V \\ \\ \frac{dA}{dt} = D(A^{(0)} - A) + \gamma_{va} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_a} g_A(A) X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D) X_A \\ \\ \frac{dH}{dt} = D(H^{(0)} - H) + \gamma_{vh} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_h} g_H(H, A) X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H, A) - D) X_H. \end{array} \right. \quad (4)$$

LA FONCTION DE CROISSANCE $g_V(V, H) = \frac{m_v V}{k_v + V + \mu_h H}$:



LA FONCTION DE CROISSANCE $g_H(H, A) = \frac{m_h H}{k_h + H + \mu_a A}$:



Le système (4) possède douze points d'équilibre :

Équilibre	V	X_V	A	X_A	H	X_H
E_1	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	$H^{(0)}$	0
E_2	$V^{(0)}$	0	$A^{(0)}$	0	λ_H^0	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H^0)$
E_3	$V^{(0)}$	0	λ_A^1	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^1)$	$H^{(0)}$	0
E_4	$V^{(0)}$	0	λ_A^2	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^2)$	$H^{(0)}$	0
E_5	$V^{(0)}$	0	λ_A^1	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^1)$	λ_H^1	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H^1)$
E_6	$V^{(0)}$	0	λ_A^2	$c_a(A^{(0)} - \lambda_A^2)$	λ_H^2	$c_h(H^{(0)} - \lambda_H^2)$
E_7	\hat{V}	$c_v(V^{(0)} - \hat{V})$	$A_V^{(0)}$ $-\gamma_{va}c_v\hat{V}$	0	$H_V^{(0)}$ $-\gamma_{vh}c_v\hat{V}$	0
E_8	\check{V}	$c_v(V^{(0)} - \check{V})$	$A_V^{(0)}$ $-\gamma_{va}c_v\check{V}$	0	\check{H}	$c_h(H_V^{(0)} - \check{H})$ $-\gamma_{vh}c_v\check{V}$
E_9	\hat{V}	$c_v(V^{(0)} - \hat{V})$	λ_A^1	$c_a(A_V^{(0)} - \lambda_A^1)$ $-\gamma_{va}c_v\hat{V}$	$H_V^{(0)}$ $-\gamma_{vh}c_v\hat{V}$	0
E_{10}	\hat{V}	$c_v(V^{(0)} - \hat{V})$	λ_A^2	$c_a(A_V^{(0)} - \lambda_A^2)$ $-\gamma_{va}c_v\hat{V}$	$H_V^{(0)}$ $-\gamma_{vh}c_v\hat{V}$	0
E_{11}	λ_V^1	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V^1)$	λ_A^1	$c_a(A^1 - \lambda_A^1)$	λ_H^1	$c_h(H^1 - \lambda_H^1)$
E_{12}	λ_V^2	$c_v(V^{(0)} - \lambda_V^2)$	λ_A^2	$c_a(A^2 - \lambda_A^2)$	λ_H^2	$c_h(H^2 - \lambda_H^2)$

avec

- $\lambda_V^0 = \lambda_V(H^{(0)})$, $\lambda_H^0 = \lambda_H(A^{(0)})$
- $\lambda_H^i = \lambda_H(\lambda_A^i)$, $\lambda_V^i = \lambda_V(\lambda_H^i)$ pour $i = 1, 2$.
- $A_V^{(0)} = A^{(0)} + \gamma_{va}c_v V^{(0)}$, $H_V^{(0)} = H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v V^{(0)}$
- $A^i = A_V^{(0)} - \gamma_{va}c_v \lambda_V^i$, $H^i = H_V^{(0)} - \gamma_{vh}c_v \lambda_V^i$ pour $i = 1, 2$.
- \hat{V} est solution de l'équation implicite

$$\hat{V} = \lambda_V(H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v(V^{(0)} - \hat{V})), \hat{H} = H_V^{(0)} - \gamma_{vh}c_v \hat{V},$$

$$\hat{A} = A_V^{(0)} - \gamma_{va}c_v \hat{V}$$
- $\check{H} = \lambda_H(A^{(0)} + \gamma_{va}c_v(V^{(0)} - \lambda_V(\check{H})))$, $\check{V} = \lambda_V(\check{H})$
 et $\check{A} = A_V^{(0)} - \gamma_{va}c_v \check{V}$

CONDITIONS D'EXISTENCE :

Equilibres	Conditions d'existence
E_1	toujours
E_2	$H^{(0)} > \lambda_H^0$
E_3	$A^{(0)} > \lambda_A^1$
E_4	$A^{(0)} > \lambda_A^2$
E_5	$A^{(0)} > \lambda_A^1$ et $H^{(0)} > \lambda_H^1$
E_6	$A^{(0)} > \lambda_A^2$ et $H^{(0)} > \lambda_H^2$
E_7	$V^{(0)} > \lambda_V^0$
E_8	$V^{(0)} > \lambda_V(\lambda_H^0)$ et $\check{H} < H_V^{(0)} - \gamma_{vh}c_v\check{V}$
E_9	$V^{(0)} > \lambda_V^0$ et $\hat{A} > \lambda_A^1$
E_{10}	$V^{(0)} > \lambda_V^0$ et $\hat{A} > \lambda_A^2$
E_{11}	$V^{(0)} > \lambda_V^1$, $A^1 > \lambda_A^1$ et $H^1 > \lambda_H^1$
E_{12}	$V^{(0)} > \lambda_V^2$, $A^2 > \lambda_A^2$ et $H^2 > \lambda_H^2$

CONDITIONS DE STABILITÉ :

Equilibres	Conditions de stabilité
E_1	$V^{(0)} < \lambda_V^0, (A^{(0)} < \lambda_A^1 \text{ ou } A^{(0)} > \lambda_A^2) \text{ et } H^{(0)} < \lambda_H^0$
E_2	$V^{(0)} < \lambda_V(\lambda_H^0), (A^{(0)} < \lambda_A^1 \text{ ou } A^{(0)} > \lambda_A^2)$
E_3	$V^{(0)} < \lambda_V^0 \text{ et } H^{(0)} < \lambda_H^1$
E_4	toujours instable
E_5	$V^{(0)} < \lambda_V^1$
E_6	toujours instable
E_7	$(\hat{A} < \lambda_A^1 \text{ ou } \hat{A} > \lambda_A^2) \text{ et } \hat{H} < \lambda_H(\hat{A})$
E_8	$\check{A} < \lambda_A^1 \text{ ou } \check{A} > \lambda_A^2$
E_9	$\hat{H} < \lambda_H^1$
E_{10}	toujours instable
E_{11}	lorsqu'il existe
E_{12}	toujours instable

- 1 Les étapes de la digestion anaérobie
- 2 Le modèle complet de la D.A.en ajoutant l'étape d'hydrolyse
- 3 L'analyse de modèles de la D.A
- 4 Le taux de biogaz produit pour les modèles avec et sans inhibition**
- 5 Perspectives

LE TAUX DE BIOGAZ PRODUIT POUR LE MODÈLE SANS INHIBITION

Le taux de méthane produit :

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A) X_A \big|_{A=A^*, X_A=X_A^*} + \alpha_2 g_H(H) X_H \big|_{H=H^*, X_H=X_H^*}$$

- Pour les équilibres E_l , E_0 et E_V : $Q_{CH_4} = 0$.
- Pour l'équilibre E_H : $Q_{CH_4} = \alpha_2 c_h D(H^{(0)} - \lambda_H)$.
- Pour l'équilibre E_A : $Q_{CH_4} = \alpha_1 c_a D(A^{(0)} - \lambda_A)$.
- Pour l'équilibre E_{AH} :
 $Q_{CH_4} = \alpha_1 c_a D(A^{(0)} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D(H^{(0)} - \lambda_H)$.
- Pour l'équilibre E_{VH} : $Q_{CH_4} = \alpha_2 c_h D(\bar{H} - \lambda_H)$.
- Pour l'équilibre E_{VA} : $Q_{CH_4} = \alpha_1 c_a D(\bar{A} - \lambda_A)$.
- Pour l'équilibre E_* : $Q_{CH_4} = \alpha_1 c_a D(\bar{A} - \lambda_A) + \alpha_2 c_h D(\bar{H} - \lambda_H)$.

Si $V^{(0)} > \lambda_V$ alors le méthane produit par le modèle sans inhibition est maximale pour l'équilibre E_* . Si $V^{(0)} < \lambda_V$ alors le maximum du méthane est donné par l'équilibre E_{AH} .

avec

$$\bullet \lambda_S = \frac{Dk_S}{m_S - D}$$

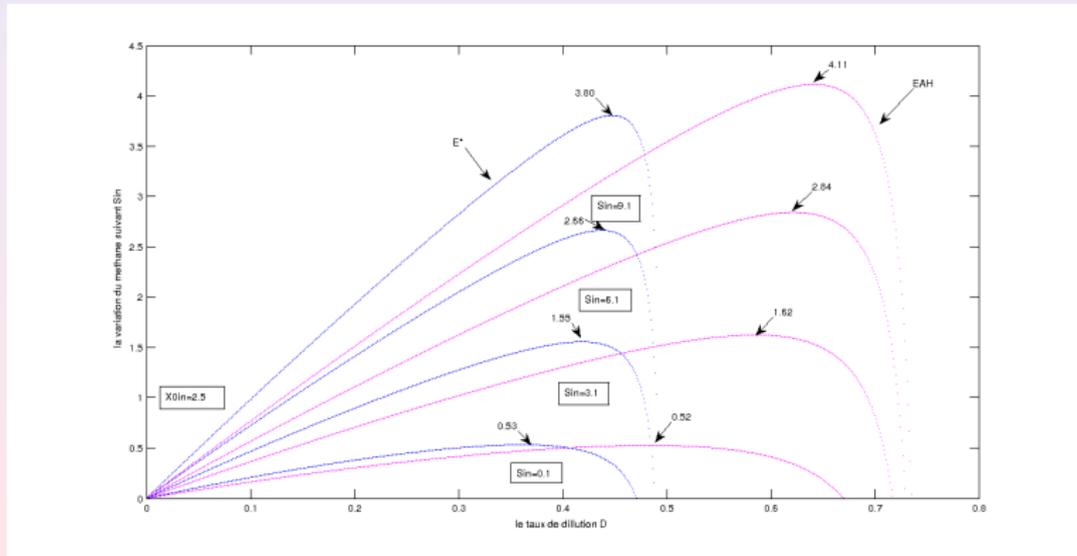
$$\bullet \lambda_V = \frac{Dk_V}{m_V - D}$$

$$\bullet \lambda_A = \frac{Dk_A}{m_A - D}$$

$$\bullet \lambda_H = \frac{Dk_H}{m_H - D}$$

et $0 < D < \min(m_S, m_V, m_A, m_H)$

LE TAUX DE MÉTHANE PRODUIT DANS LE CAS $V^{(0)} < \lambda_V$, X_{0in} FIXE ET S_{in} VARIE



LE TAUX DE BIOGAZ PRODUIT POUR LE MODÈLE SANS INHIBITION

Le taux de l'hydrogène produit :

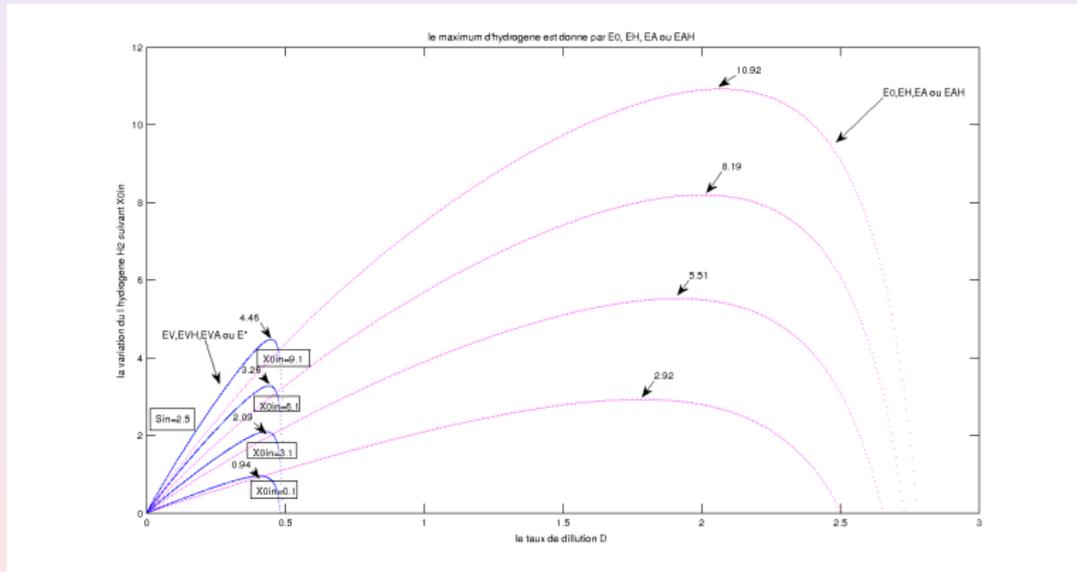
$$Q_{H_2} = \alpha_3 g_S(S) X_S \big|_{S=S^*, X_S=X_S^*} + \alpha_4 g_V(V) X_V \big|_{V=V^*, X_V=X_V^*}$$

- Pour l'équilibre E_l : $Q_{H_2} = 0$.
- Pour les équilibres E_0, E_H, E_A et E_{AH} : $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^*$.
- Pour les équilibres E_V, E_{VH}, E_{VA} et E_* :

$$Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^* + \alpha_4 D c_v (V^{(0)} - \lambda_V)$$

Si $V^{(0)} > \lambda_V$ alors l'hydrogène produit par le modèle sans inhibition est maximale pour l'un des équilibres E_V, E_{VH}, E_{VA} ou E_* . Si $V^{(0)} < \lambda_V$ alors le maximum de l'hydrogène est donné par E_0, E_H, E_A ou E_{AH} .

LE TAUX D'HYDROGÈNE PRODUIT DANS LE CAS $V^{(0)} < \lambda_V$, S_{in} FIXE ET X_{0in} VARIE



LE TAUX DE BIOGAZ PRODUIT POUR LE MODÈLE AVEC INHIBITION

Le taux de méthane produit :

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A) X_A \big|_{A=A^*, X_A=X_A^*} + \alpha_2 g_H(H, A) X_H \big|_{H=H^*, A=A^*, X_H=X_H^*}$$

- Pour les équilibres E_1 et E_7 : $Q_{CH_4} = 0$.
- Pour l'équilibre E_2 : $Q_{CH_4} = \alpha_2 Dc_h(H^{(0)} - \lambda_H^0)$.
- Pour l'équilibre E_3 : $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A^{(0)} - \lambda_A^1)$.
- Pour l'équilibre E_4 : $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A^{(0)} - \lambda_A^2)$.
- Pour l'équilibre E_5 :
 $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A^{(0)} - \lambda_A^1) + \alpha_2 Dc_h(H^{(0)} - \lambda_H^1)$.
- Pour l'équilibre E_6 :
 $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A^{(0)} - \lambda_A^2) + \alpha_2 Dc_h(H^{(0)} - \lambda_H^2)$.

avec

$$\bullet \lambda_S = \frac{Dk_s}{m_s - D}$$

$$\bullet \lambda_A^1 = \frac{(m_a - D) - \sqrt{(D - m_a)^2 - 4D^2 \frac{k_a}{k_I}}}{\frac{2D}{k_I}}$$

$$\bullet \lambda_A^2 = \frac{(m_a - D) + \sqrt{(D - m_a)^2 - 4D^2 \frac{k_a}{k_I}}}{\frac{2D}{k_I}}$$

$$\bullet \lambda_H^1 = \frac{D(k_h + \mu_a \lambda_A^1)}{m_h - D}$$

$$\bullet \lambda_H^2 = \frac{D(k_h + \mu_a \lambda_A^2)}{m_h - D}$$

$$\bullet \lambda_V^1 = \frac{D(k_v + \mu_h \lambda_H^1)}{m_v - D}$$

$$\bullet \lambda_V^2 = \frac{D(k_v + \mu_h \lambda_H^2)}{m_v - D}$$

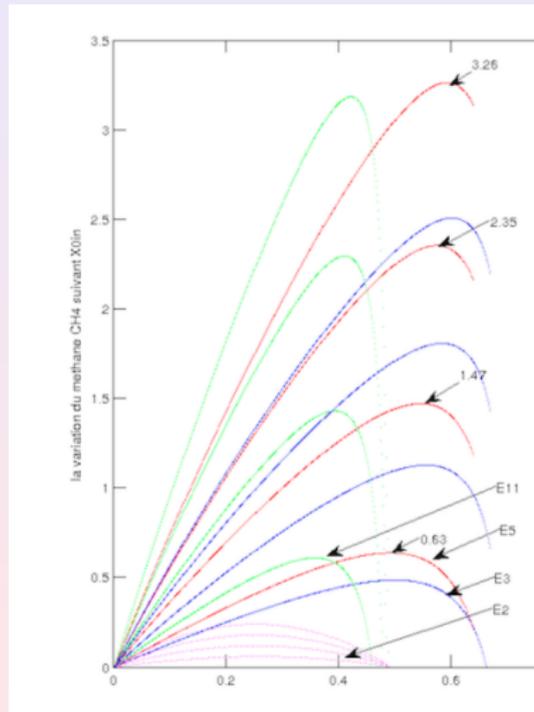
LE TAUX DE BIOGAZ PRODUIT POUR LE MODÈLE AVEC INHIBITION

Le taux de méthane produit :

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A) X_A \big|_{A=A^*, X_A=X_A^*} + \alpha_2 g_H(H, A) X_H \big|_{H=H^*, A=A^*, X_H=X_H^*}$$

- Pour l'équilibre E_8 : $Q_{CH_4} = \alpha_2 Dc_h(H_V^{(0)} - \check{H} - \gamma_{vh}c_v\check{V})$.
- Pour l'équilibre E_9 : $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A_V^{(0)} - \lambda_A^1 - \gamma_{va}c_v\hat{V})$.
- Pour l'équilibre E_{10} : $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A_V^{(0)} - \lambda_A^2 - \gamma_{va}c_v\hat{V})$.
- Pour l'équilibre E_{11} :
 $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A^1 - \lambda_A^1) + \alpha_2 Dc_h(H^1 - \lambda_H^1)$.
- Pour l'équilibre E_{12} :
 $Q_{CH_4} = \alpha_1 Dc_a(A^2 - \lambda_A^2) + \alpha_2 Dc_h(H^2 - \lambda_H^2)$.

LE TAUX DE MÉTHANE PRODUIT POUR S_{in} FIXE ET X_{0in} VARIE



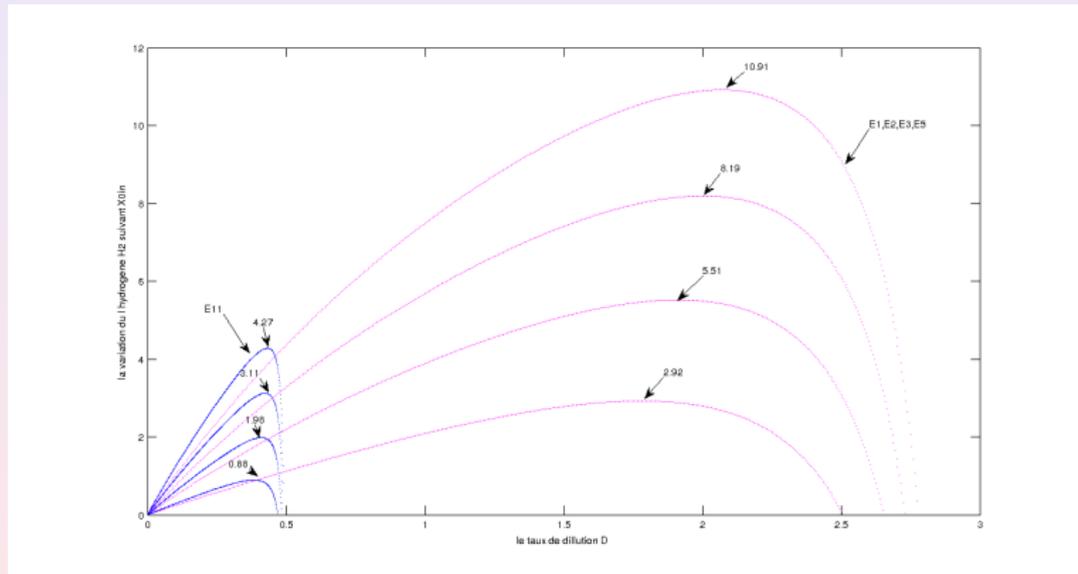
LE TAUX DE BIOGAZ PRODUIT POUR LE MODÈLE AVEC INHIBITION

Le taux de l'hydrogène produit :

$$Q_{H_2} = \alpha_3 g_S(S) X_S \big|_{S=S^*, X_S=X_S^*} + \alpha_4 g_V(V, H) X_V \big|_{V=V^*, H=H^*, X_V=X_V^*}$$

- Pour les équilibres E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6 : $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^*$.
- Pour les équilibres E_7, E_9 et E_{10} :
 $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^* + \alpha_4 D c_v(V^{(0)} - \hat{V})$.
- Pour l'équilibre E_8 : $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^* + \alpha_4 D c_v(V^{(0)} - \check{V})$.
- Pour l'équilibre E_{11} : $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^* + \alpha_4 D c_v(V^{(0)} - \lambda_V^1)$.
- Pour l'équilibre E_{12} : $Q_{H_2} = \alpha_3 D X_S^* + \alpha_4 D c_v(V^{(0)} - \lambda_V^2)$.

LE TAUX DE L'HYDROGÈNE PRODUIT POUR S_{in} FIXE ET X_{0in} VARIE



- 1 Les étapes de la digestion anaérobie
- 2 Le modèle complet de la D.A.en ajoutant l'étape d'hydrolyse
- 3 L'analyse de modèles de la D.A
- 4 Le taux de biogaz produit pour les modèles avec et sans inhibition
- 5 Perspectives

- Construction de lois de contrôle pour maximiser la production d' H_2 et de CH_4 .
- L'études d'autres modèles de digestion anaérobie en prenant en compte les termes de mortalité et l'inhibition dans les fonctions de croissance.

Références :

- [1] M. Weeder mann, G. Seo and G.S.K.Wolkowicz, (2013), *Mathematical model of anaerobic digestion in a chemostat : effects of syntrophy and inhibition*; Journal of Biological Dynamics, 7(1), pp 59-85.
- [2] T. Sari, M. El Hajji and J. Harmand, (2012), *The mathematical analysis of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat*; Math Biosci Eng. 9, pp 627-645.
- [3] M. Hajji, F. Mazenc and J. Harmand, (2010), *A mathematical study of syntrophic relationship of a model of anaerobic digestion process*; Math Biosci Eng. 7, pp 641-656.
- [4] J. Hess and O. Bernard, (2008), *Design and study of a risk management criterion for an instable wastewater treatment process*; J. Process Control 18, pp 71-79.
- [5] M. Weeder mann, G.S.K.Wolkowicz, (2015), *Optimal biogas production in a model for anaerobic digestion*; Nonlinear Dyn.

Les étapes de la digestion anaérobie

Le modèle complet de la D.A.en ajoutant l'étape d'hydrolyse

L'analyse de modèles de la D.A

Le taux de biogaz produit pour les modèles avec et sans inhibition

Perspectives

