

# Commandes avancées des procédés biologiques

A. Rapaport <sup>a</sup> et J. Harmand <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire d'Analyse des Systèmes et Biométrie,  
INRA - LASB, 2, Place Viala, 34000, France.  
Tel : +33 (0) 561.336.477, Fax : +33 (0) 561.336.969  
Email : rapaport@ensam.inra.fr

<sup>b</sup> Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement,  
INRA - LBE, Avenue des étangs, 11100 Narbonne, France.  
Tel : +33 (0) 468.425.159, Fax : +33 (0) 468.425.160  
Email : harmand@ensam.inra.fr

September 1, 2005

Ce cours est le fruit d'une collaboration entre le LBE - INRA de Narbonne et le LASB - INRA de Montpellier. Il s'adresse en premier lieu aux élèves ingénieurs ainsi qu'aux étudiants de troisième cycle souhaitant poursuivre en thèse ou plus simplement acquérir l'essentiel des concepts utilisés pour la modélisation, l'analyse et la commande des procédés biologiques.

## 1 Rappels

*Dérivées des fonctions composées*

$$[f(g(x))]' = \frac{df}{dg} g'(x) \quad (1)$$

avec  $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ .

*Dérivées des fonctions de plusieurs variables*

Soit  $f$  une fonction de plusieurs variables  $x_i, i = 1..n$ . La différentielle totale de  $f$  notée  $df$  s'écrit :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (2)$$

Si de plus les  $x_i$  sont des fonctions de  $t$ , on en déduit que :

$$\frac{df}{dt} = f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i(x) \quad (3)$$

*Valeurs propres et vecteurs propres*

Soit une matrice carrée  $A$ . On appelle valeurs propres et vecteurs propres de  $A$  respectivement les nombres  $\lambda_i$  et les vecteurs  $v_i$  tels que  $\lambda_i v_i = A v_i$ . Une matrice  $A$  de dimension  $n$  admet  $n$  valeurs propres et  $n$  vecteurs propres correspondants. On retiendra en particulier que  $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et que  $det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ .

## 2 Modélisation par bilan matière des procédés biologiques

### 2.1 Equations de bilan

Soit un réacteur parfaitement mélangé de volume  $V$  dans lequel une "biomasse" de concentration  $X$  croît sur un "substrat" de concentration  $S$  (Cf. Figure 1). Le système est alors régi par le système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= \mu(S(t))X(t) - \frac{Q_{in}(t)}{V(t)}X(t) \\ \dot{S}(t) &= \frac{Q_{in}(t)}{V(t)}(S_{in}(t) - S(t)) - \frac{\mu(S(t))X(t)}{Y} \\ \dot{V}(t) &= Q_{in}(t) - Q_{out}(t) \end{cases} \quad (4)$$

où  $X$  et  $S$  dénotent respectivement les concentrations en micro-organismes et en substrat à l'intérieur du réacteur (en masse par unité de volume),  $Q_{in}$  et  $Q_{out}$  sont les débits d'entrée et de sortie du réacteur (en volume par unité de temps),  $S_{in}$  est la concentration du substrat dans l'alimentation,  $\mu(\cdot)$  est le taux de croissance spécifique du micro-organisme (la dimension en est l'inverse du temps) et  $Y$  est le coefficient de rendement de croissance de la biomasse (en masse de biomasse produite par masse de substrat dégradé).

Selon les valeurs de  $Q_{in}(t)$  et de  $Q_{out}(t)$ , on définit les modes de fonctionnement suivants :

1. Si  $Q_{out}(t) = Q_{in}(t) \neq 0$  pour tout  $t$ , alors le réacteur fonctionne en mode *continu* (le flux de matière sortant est égal au flux entrant : le volume du réacteur est donc constant);
2. Si  $Q_{out}(t) = 0$  et  $Q_{in}(t) \neq 0$  alors le réacteur fonctionne en mode *semi-continu* (ou *fedbatch* en anglais);
3. Si  $Q_{out}(t) = Q_{in}(t) = 0$ , le réacteur fonctionne en mode fermé, encore appelé discontinu (ou *batch* en anglais).

On introduit couramment le changement de variable  $D = Q_{in}/V$  où  $D$  est le taux de dilution (à noter que  $1/D$  est homogène à un temps : c'est le "temps de séjour hydraulique" qui définit le temps moyen mis par une molécule d'eau pour entrer et sortir du réacteur). Le système (4) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= (\mu(S(t)) - D(t))X(t) \\ \dot{S}(t) &= D(t)(S_{in}(t) - S(t)) - \frac{\mu(S(t))X(t)}{Y} \\ \dot{V}(t) &= D(t)V(t) - Q_{out}(t) \end{cases} \quad (5)$$

### 2.2 Expression des cinétiques

La vitesse de croissance des microorganismes est intimement liée à l'environnement dans lequel s'effectue cette croissance. Comme tout être vivant, une bactérie possède, pour chaque paramètre environnemental considéré (pH, température, pression, concentrations des substrats nécessaires à sa croissance et à son développement, etc...), une plage optimale de croissance. Ainsi, par exemple, la plupart des bactéries ont un taux de croissance optimal vis-à-vis de la température de 35-37 degrés C. Toutefois, dans les conditions environnementales rencontrées dans le contexte du traitement des eaux, la concentration en substrat joue un rôle prépondérant par rapport aux autres facteurs influençant la croissance. Par conséquent, une simplification courante consiste à ne faire intervenir que le substrat dans le taux de croissance des microorganismes considérés. On distingue deux formes possibles de taux de croissance :

- Limitation-saturation : la fonction de Monod rend compte de ces phénomènes et s'écrit  $\mu(S) = \mu_{max} \frac{S}{S+K_S}$  (Cf. figure 2);

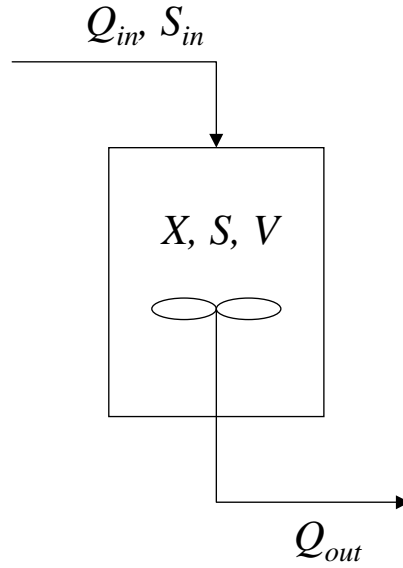


Figure 1: Réacteur biologique parfaitement mélangé

- Limitation-inhibition : la fonction d'Haldane permet de rendre compte de ces phénomènes et s'écrit  $\mu(S) = \mu_0 \frac{S}{S^2/K_I + S + K_S}$  (Cf. figure 3).

*Remarque :* Pour une cinétique de Monod, la valeur maximale du taux de croissance apparaît explicitement dans l'écriture de la cinétique car  $\lim_{S \rightarrow \infty} \mu(S) = \mu_{max}$ . En revanche, on notera que la valeur maximale d'une fonction de Haldane n'est pas  $\mu_0$  : elle est atteinte pour  $S^* = \sqrt{K_S K_I}$  et vaut  $\mu(S^*)$ .

## 2.3 Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système peuvent être calculés en posant  $\dot{X}(t) = 0$  et  $\dot{S}(t) = 0$  :

$$\begin{cases} \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S}) &= \frac{\mu(\bar{S})\bar{X}}{Y} \\ (\mu(\bar{S}) - \bar{D}) &= 0 \end{cases} \quad (6)$$

*Remarque :* On suppose que  $\bar{S}_{in} > \bar{S}$

Des équations (6), on déduit les points d'équilibre suivants :

- $\bar{X} = 0$  : ce cas signifie qu'il n'y a plus de biomasse à l'intérieur du réacteur. On dit qu'il y a "lessivage" du réacteur;
- $\mu(\bar{S}) = \bar{D}$ . Pour  $\bar{D}$  pas trop grand, ceci signifie qu'il existe un point d'équilibre fonctionnel pour une cinétique de Monod tandis que pour une cinétique de Haldane, on notera la présence de deux points d'équilibre (Cf. les figures 4 et 5).

## 2.4 Stabilité des points d'équilibre

### 2.4.1 Définitions générales

**Définition 1 :** Un point d'équilibre  $x_e$  d'un système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  est un point vérifiant  $f(x_e) = 0$ .

**Définition 2 :** Le point d'équilibre  $x_e$  du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  est dit :

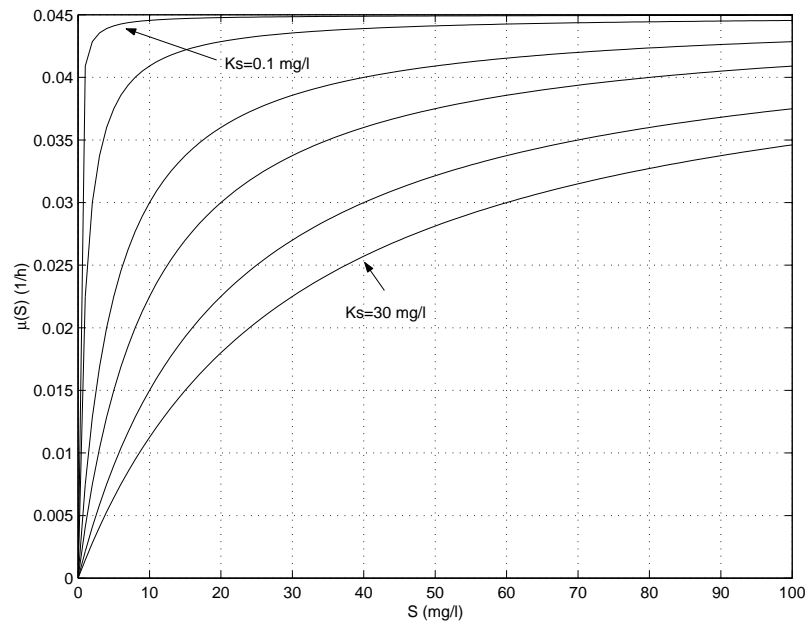


Figure 2: La fonction de Monod avec  $\mu_{max} = 0.045h^{-1}$  et pour différentes valeurs de  $K_S$  ( $mg.l^{-1}$ )

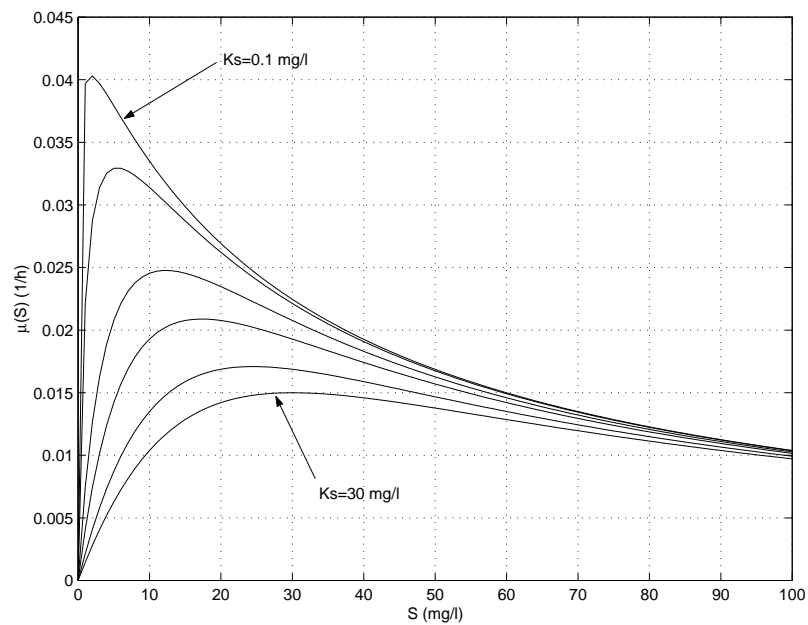


Figure 3: La fonction de Haldane avec  $\mu_0 = 0.045 h^{-1}$ ,  $K_I = 30 mg.h^{-1}$  et pour différentes valeurs de  $K_S$  ( $mg.l^{-1}$ )

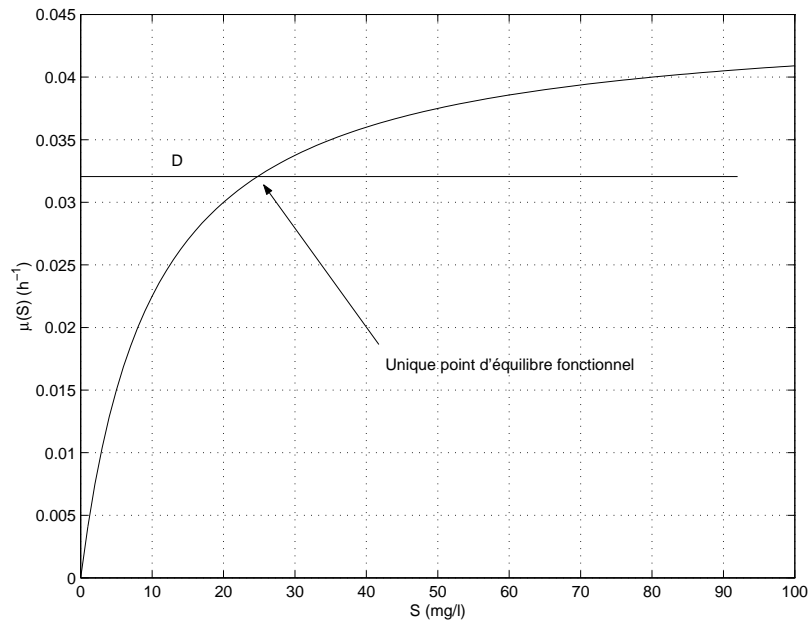


Figure 4: Point d'équilibre fonctionnel pour une cinétique de Monod

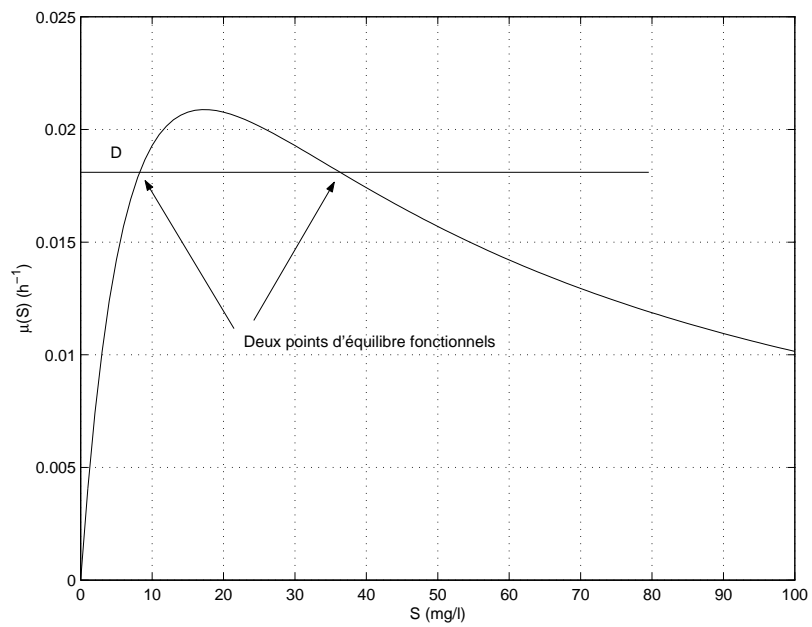


Figure 5: Points d'équilibre fonctionnels pour une cinétique de Haldane

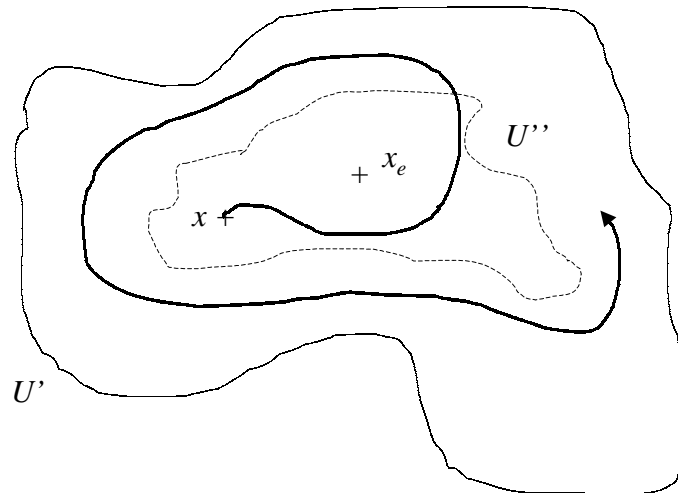


Figure 6: Point stable

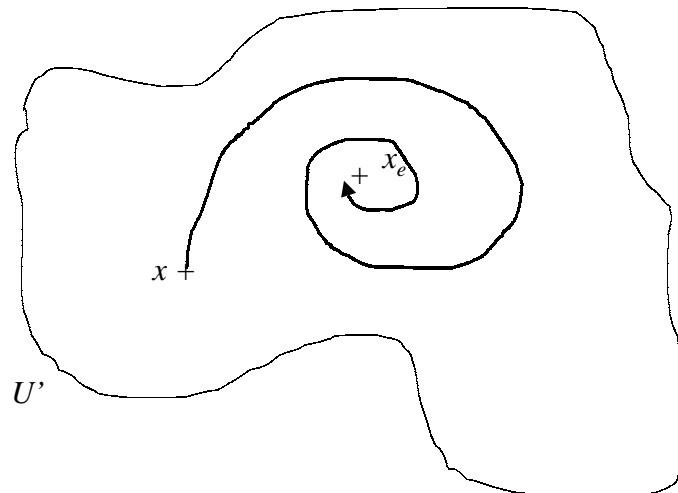


Figure 7: Point attractif

- *stable* si pour tout voisinage  $U'$  de  $x_e$  il existe un autre voisinage  $U''$  de  $x_e$  tel que pour tout  $x_0$  dans  $U''$ , la solution du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  est définie et appartient à  $U'$  pour tout temps (cf. la figure 6);
- *asymptotiquement stable* s'il est stable et s'il existe un voisinage  $U'$  de  $x_e$  tel que pour tout  $x$  dans  $U'$ , la solution du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  tend vers  $x_e$  lorsque  $t$  tend vers l'infini (cette propriété définit un point "attractif") (cf. la figure 7);
- *globalement asymptotiquement stable* si pour toute condition initiale  $x_0$ , la solution de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  converge asymptotiquement vers  $x_e$  lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- *instable* s'il n'est pas stable.

En d'autres termes, être stable signifie que si la condition initiale n'est pas "très éloignée" du point d'équilibre, la trajectoire restera peu éloignée du point d'équilibre. Être asymptotiquement stable, c'est en outre garantir que la trajectoire va converger vers  $x_e$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

### 2.4.2 Théorème de Lyapunov

On rappelle tout d'abord le résultat suivant qui donne une condition suffisante de stabilité asymptotique du système  $\dot{x} = f(x)$  :

**Théorème (Lyapunov) :** Un point d'équilibre  $\bar{x}$  du système  $\dot{x} = f(x)$  est asymptotiquement stable si toutes les racines du polynôme caractéristique de la matrice  $A = Jac(f(\bar{x}))$  sont à partie réelle strictement négatives. Réciproquement, si au moins une valeur propre de  $A$  est à partie réelle strictement positive, alors le système est instable.

*Remarque* Cette condition est "uniquement suffisante" car pour un système non-linéaire on ne peut pas conclure si au moins l'une des racines est imaginaire : dans certains cas, le système peut tout aussi bien être asymptotiquement stable qu'instable. On dit alors que le point d'équilibre n'est pas hyperbolique. Pour lever l'ambiguïté, on peut avoir recours à l'utilisation des fonctions de Lyapunov pour l'étude de la stabilité de ce point d'équilibre. Notez que si le système dynamique est linéaire, alors le théorème ci-dessus fournit alors une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique.

### 2.4.3 Application au modèle 4 - Linéarisation du système autour d'un point $\bar{x}$

#### Cas général

Soient  $\delta X = X - \bar{X}$  et  $\delta S = S - \bar{S}$ . En utilisant le développement de Taylor au premier ordre autour de  $\bar{x}$ , on obtient facilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta X) = (\mu(S) - \bar{D})X \\ \approx (\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S - \bar{D})(\bar{X} + \delta X) \\ \approx (\mu(\bar{S}) - \bar{D})(\bar{X} + \delta X) + \mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S \end{array} \right. \quad (7)$$

De même, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta S) = -\frac{\mu(S)X}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - S) \\ \approx -\frac{(\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S)(\bar{X} + \delta X)}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S} - \delta S) \\ \approx -\frac{\mu(\bar{S})\bar{X}}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S}) - \frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S}{Y} - \frac{\mu(\bar{S})\delta X}{Y} - \bar{D}\delta S \end{array} \right. \quad (8)$$

d'où on tire :

$$A = \begin{bmatrix} \mu(\bar{S}) - \bar{D} & \mu'(\bar{S})\bar{X} \\ -\frac{\mu(\bar{S})}{Y} & -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D} \end{bmatrix} \quad (9)$$

#### Stabilité du point $\{0, S_{in}\}$

Dans ce cas, on a :

$$A = \begin{bmatrix} \mu(S_{in}) - \bar{D} & 0 \\ -\frac{\mu(S_{in})}{Y} & -\bar{D} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $A$ , on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \mu(S_{in}) - 2\bar{D} \\ \Delta = -\bar{D}(\mu(S_{in}) - \bar{D}) \end{array} \right. \quad (11)$$

où  $\Omega = tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et  $\Delta = det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ .

D'où on tire  $\lambda_1 = -\bar{D}$  et  $\lambda_2 = \mu(S_{in}) - \bar{D}$ .

On en déduit que :

- Si  $\mu(S_{in}) - \bar{D} > 0$ , le point d'équilibre  $\{0, S_{in}\}$  est asymptotiquement instable.
- Si  $\mu(S_{in}) - \bar{D} < 0$  alors le point d'équilibre  $\{0, S_{in}\}$  est asymptotiquement stable.

**Remarque** Dans le cas où  $\mu(\cdot)$  n'est pas monotone, pour  $S_{in}$  grand (ou tout simplement pour tout  $\bar{D} > \max(\mu(\cdot))$ ) il se peut que  $\mu(S_{in}) - \bar{D} < 0$ . On trouve là l'argument essentiel qui justifie la mise au point d'algorithmes de commande pour les bioprocédés : lorsque la cinétique n'est pas monotone, le point d'équilibre  $\{0, S_{in}\}$  correspondant au lessivage est stable.

**Stabilité du point**  $\{\bar{X}, \bar{S}\}|_{\bar{X} \neq 0}$

Soient  $\delta X = X - \bar{X}$  et  $\delta S = S - \bar{S}$ . En utilisant le développement de Taylor au premier ordre autour de  $\bar{x}$ , on obtient facilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta X) = (\mu(S) - \bar{D})X \\ \approx (\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S - \bar{D})(\bar{X} + \delta X) \\ \approx \underbrace{(\mu(\bar{S}) - \bar{D})}_{=0}(\bar{X} + \delta X) + \mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S \\ \approx \mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S \end{array} \right. \quad (12)$$

De même, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta S) = -\frac{\mu(S)X}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - S) \\ \approx -\frac{(\mu(\bar{S}) + \mu'(\bar{S})\delta S)(\bar{X} + \delta X)}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S} - \delta S) \\ \approx \underbrace{-\frac{\mu(\bar{S})\bar{X}}{Y} + \bar{D}(\bar{S}_{in} - \bar{S})}_{=0} - \frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}\delta S}{Y} - \frac{\mu(\bar{S})\delta X}{Y} - \bar{D}\delta S \\ \approx -\frac{\mu(\bar{S})\delta X}{Y} - \left(\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} + \bar{D}\right)\delta S \end{array} \right. \quad (13)$$

d'où on tire :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mu'(\bar{S})\bar{X} \\ -\frac{\mu(\bar{S})}{Y} & -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D} \end{bmatrix} \quad (14)$$

avec  $\mu(\bar{S}) = \bar{D}$ ,  $\mu'(S) = \frac{\partial \mu(S)}{\partial S}$

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $A$ , on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D} \\ \Delta = \frac{\bar{D}\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} \end{array} \right. \quad (15)$$

où  $\Omega = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et  $\Delta = \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ .

D'où on tire  $\lambda_1 = -\bar{D}$  et  $\lambda_2 = -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y}$ . Donc, le système est asymptotiquement stable si  $\mu'(\bar{S}) > 0$ .



**Remarque** Lorsque  $\mu(\cdot)$  est monotone, on déduit de la condition ci-dessus que le point d'équilibre  $\{\bar{X}, \bar{S}\}|_{\bar{X} \neq 0}$  est asymptotiquement stable. En revanche, dans le cas où  $\mu(\cdot)$  n'est pas monotone, si l'on exclue le lessivage (on suppose donc que  $\mu(S_{in}) - \bar{D} > 0$ , ce qui signifie que le point d'équilibre  $\{0, S_{in}\}$  est instable), alors, ainsi que souligné dans la section 2.3, l'équation  $\mu(S) = \bar{D}$  admet deux solutions. On déduit alors de la condition ci-dessus  $\mu'(\bar{S}) > 0$  que le point d'équilibre situé à gauche du maximum de  $\mu(\cdot)$  est asymptotiquement stable alors que le point situé à la droite de ce maximum est asymptotiquement instable.

### 3 Commande linéaire des systèmes biologiques

#### 3.1 Objectifs

On cherche un retour d'état  $D : x \rightarrow D(x)$  pour stabiliser le système autour d'un équilibre  $(\bar{X}, \bar{S})$  instable (point d'équilibre "à droite" sur une cinétique de Haldane) en supposant que l'on ne mesure que  $S$ .

**Lemme :** Le domaine  $\bar{\Omega} = \{(X, S)/X \geq 0, S \in [0, S_{in}]\}$  est invariant pour toute loi de commande  $D \geq 0$ .

**Preuve** Considérons d'abord la droite  $X = 0$ . Si  $X = 0$  alors  $\dot{X} = 0$ . Ceci signifie que si  $X(0) = 0$ , alors  $X(t) = 0, \forall t$ . En d'autres termes, la réaction biologique ne peut démarrer que s'il existe de la biomasse à l'intérieur du réacteur. Toutefois, on peut compléter ce premier résultat : nous allons montrer que  $X(t)$  ne peut être nul que si  $X(0) = 0$ . Supposons qu'à partir d'une condition initiale  $X(0) = X_0$  non nulle, il soit possible d'atteindre 0 en un temps fini  $T$  (nous aurions alors  $X(T) = 0$ ). En intégrant d'une manière rétrograde de  $t = T$  à  $t = 0$  à partir de  $X(T) = 0$ , nous devrions retrouver  $X_0$ . Or, nous avons montré précédemment que lorsque la condition initiale sur  $X$  était nulle, la trajectoire ne pouvait pas quitter 0 (on admet ici que ceci reste vrai en temps rétrograde). De part l'unicité des trajectoires, il n'est donc pas possible qu'à partir d'une condition initiale  $X(0) = X_0$  non nulle, on atteigne 0 en temps fini. Donc, les trajectoires issues de conditions initiales non nulles dans  $\bar{\Omega}$  ne peuvent pas franchir l'axe  $X = 0$ .

Pour  $S$ , il suffit de constater que pour  $S = 0$ , le champ de vecteur est positif :  $\dot{S} \geq 0$  ( $S$  va augmenter). De même, en  $S_{in}$ , il suffit de constater que le champ de vecteur est négatif :  $\dot{S} \leq 0$ . Donc, les trajectoires issues de conditions initiales dans  $\bar{\Omega}$  ne peuvent pas franchir les droites  $S = 0$  et  $S = S_{in}$ . ■

#### 3.2 Commande linéaire stabilisante

Dans le cas d'un retour d'état linéaire, la loi de commande s'écrit :

$$D(t) = \bar{D} + K(\bar{S} - S(t)) \quad (16)$$

où  $K$  est un paramètre de réglage de la commande (gain). Le système bouclé linéarisé autour de  $(\bar{X}, \bar{S})$  s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\delta x) &= \left( A + \begin{bmatrix} 0 & K\bar{X} \\ 0 & K(\bar{S} - \bar{S}_{in}) \end{bmatrix} \right) \delta x \\ &= G\delta x \end{cases} \quad (17)$$

avec  $\delta x = [\delta X, \delta S]^T$ .

Afin de s'assurer que le système en boucle fermée est stable, il faut choisir  $K$  tel que la matrice  $G$  a des valeurs propres à parties réelles strictement négatives. On procède comme dans la section 2.4.3. A savoir, de (17), on tire :

$$\begin{cases} \Omega &= -\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D} + K(\bar{S} - \bar{S}_{in}) \\ \Delta &= \frac{\bar{D}\bar{X}}{Y}(\mu'(\bar{S}) + K) \end{cases} \quad (18)$$

d'où on déduit que le système bouclé (17) est asymptotiquement stable si :

$$K > \frac{-\frac{\mu'(\bar{S})\bar{X}}{Y} - \bar{D}}{(\bar{S}_{in} - \bar{S})} \quad (19)$$

et

$$K > -\mu'(\bar{S}). \quad (20)$$

*Remarque 1 :* Dans le cas d'Haldane, si  $\bar{S}$  est à droite de  $\sqrt{K_S \cdot K_I}$  (c'est à dire si  $\mu'(\bar{S}) < 0$ ) alors  $K$  doit nécessairement être positif.

*Remarque 2 :* Rien ne garantit a priori que  $D(t)$  reste positif ni que la commande positive  $D(t) = \max(\bar{D} + K(\bar{S} - S(t)), 0)$  stabilise effectivement le système (qui est non linéaire!).

## 4 Approches non linéaires de commande

### 4.1 Commande linéarisante par feedback

On cherche une loi de commande qui rende la dynamique de  $S$  linéaire stable (ainsi, le système bouclé doit converger exponentiellement vers le point d'équilibre considéré). On supposera dans cette section que  $X$ ,  $S$  et  $S_{in}$  sont mesurées.

**Proposition 1 :** La loi de commande :

$$D(X, S) = \frac{\frac{\mu(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S})}{S_{in} - S} \quad (21)$$

est une commande qui garantit la convergence exponentielle de  $S$  vers  $\bar{S}$ .

Avant de présenter la preuve, on rappelle le résultat suivant sur les fonctions de Lyapunov.

**Définition :** Soit un équilibre  $x_e$  du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$ . On appelle "fonction de Lyapunov pour  $f$  en  $x_e$ ", une fonction  $V$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  ou sur un ensemble invariant par  $f$  :

- $V(x) > 0$  sauf en  $x_e$  où elle vaut  $V(x_e) = 0$ ;
- $V$  est différentiable à dérivées continues et  $\dot{V} \leq 0$ ;
- $V$  est radialement non bornée.

**Proposition 2 :** S'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  pour  $f$  en  $x_e$ , alors le système est globalement asymptotiquement stable en  $x_e$ .

Preuve de la proposition 2 : Voir par exemple Vidyasagar.

**Preuve de la proposition 1 :** Introduisons la fonction :

$$V(S) = \frac{1}{2}(S - \bar{S})^2 \quad (22)$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = (S - \bar{S})\dot{S} \\ = (S - \bar{S})\left(-\frac{\mu(S)X}{Y} + D(S_{in} - S)\right) \\ = -\lambda(S - \bar{S})^2 \\ = -2\lambda V \end{array} \right. \quad (23)$$

Donc,  $V(t) = V(0)\exp(-2\lambda t)$  d'où l'on déduit la convergence exponentielle de  $S$  vers  $\bar{S}$  selon  $|S - \bar{S}| = |S(0) - \bar{S}|\exp(-\lambda t)$ . ■

*Remarque 1 :* Cette loi de commande nécessite non seulement la connaissance de  $S$ , mais également celle de  $X$ , de  $S_{in}$  et de  $\mu(S)$ .

*Remarque 2 :*  $\lambda$  ne doit pas être choisi trop grand si l'on souhaite garantir la positivité de  $D$ .

## 4.2 Commande non linéaire dynamique

On se propose dans cette section d'étudier une loi de commande permettant de relaxer les éléments nécessaires à l'implémentation d'une commande linéarisante. En d'autres termes, la commande suivante permet de contrôler un procédé biologique à partir de la seule connaissance de  $S$  et de  $S_{in}$  (avec  $S_{in}$  constante), voire uniquement de  $S$  (cette dernière version n'est pas présentée ici pour des raisons de place, pour des détails, le lecteur peut se reporter à [1]). Mais surtout, cette commande vérifie les contraintes physiques  $\forall t, D(t) \in [D^-, D^+]$  avec  $0 < D^- < \bar{D} < D^+$ . Contrairement aux lois précédentes qui sont statiques (calculées à partir de formules analytiques des variables d'état du système), on considère ici une commande dynamique (qui est la sortie d'un système dynamique auxiliaire).

**Proposition 2 :** La loi de commande :

$$D = \theta \quad (24)$$

$$\dot{\theta} = -\lambda(S - S_{in})(\theta - D^+)(\theta - D^-)(S - \bar{S}) \quad (25)$$

où  $\lambda$  est une constante positive et

$$\theta(0) \in [D^-, D^+] \quad (26)$$

stabilise asymptotiquement le système localement autour de  $\bar{S}$  si  $\dot{\mu}(\bar{S}) > 0$ .

*Remarque :* Dans la mesure où cette loi ne nécessite pas la connaissance de  $\mu(\cdot)$ , on dit qu'elle est "robuste vis-à-vis de  $\mu(\cdot)$ ".

**Preuve :** Soit  $Z = S_{in} - S - \frac{X}{Y}$ . Le système dynamique couplé permettant de calculer la commande se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{Z} &= -\theta Z \\ \dot{S} &= (\mu(S) - \theta)(S - S_{in}) + \mu(S)Z \\ \dot{\theta} &= -\lambda(S - S_{in})(S - \bar{S})(\theta - D^+)(\theta - D^-) \end{cases} \quad (27)$$

Afin de prouver la stabilité du système bouclé, nous allons réduire la dimension du système à étudier en remarquant que  $\forall \theta(0) \in [D^-, D^+]$ ,  $\theta(t)$  tend asymptotiquement vers 0. Pour cela, nous utilisons le théorème suivant :

**Théorème :** Soit le système  $(S) : \dot{x} = f(x, z(t))$  avec  $f(0, 0) = 0$  et  $z(t)$  qui tend asymptotiquement vers 0. Si  $x = 0$  est un équilibre asymptotiquement stable de  $\dot{x} = f(x, 0)$ , alors toute solution bornée de  $S$  converge asymptotiquement vers 0.

**Preuve** Voir Isidori ou Vidyasagar.

En appliquant ce théorème au système (27) (en notant que les solutions de  $(S, \theta)$  restent bornées dans  $[0, S_{in}] \times [D^-, D^+]$  et en posant  $z(t) = Z(t)$ ), il nous suffit d'étudier la stabilité du système :

$$\begin{cases} \dot{S} &= (\mu(S) - \theta)(S - S_{in}) \\ \dot{\theta} &= -\lambda(S - S_{in})(S - \bar{S})(\theta - D^+)(\theta - D^-) \end{cases} \quad (28)$$

Pour cela, nous posons  $r = \frac{\bar{D} - D^+}{D^+ - \bar{D}} < 0$  et  $r + 1 = \frac{\bar{D} - D^-}{D^+ - \bar{D}} > 0$ . Soit la fonction :

$$V(S, \theta) = \frac{(S - \bar{S})^2}{2} + \omega(\theta) - \omega(\bar{D}) \quad (29)$$

avec  $\omega(\theta) = \log((D^+ - \theta)^{\frac{r}{\lambda}}) - \log((\theta - D^-)^{\frac{r+1}{\lambda}})$ .

Le premier point à vérifier est que  $V$  est définie positive (positive quels que soient  $S$  et  $\theta$  et ne s'annule qu'en 0 ( $\bar{S}, \bar{D}$  pour le système (28)). Cherchons en quelle valeur s'annule  $\omega$  en calculant ses extrema :

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{r}{\lambda} \frac{1}{D^+ - \theta} - \frac{r+1}{\lambda} \frac{1}{\theta - D^-} \quad (30)$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{d\theta} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\bar{D} - D^+}{D^+ - \theta} - \frac{\bar{D} - D^-}{\theta - D^-} = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = \bar{D} \end{cases} \quad (31)$$

Donc  $\omega$  est minimale en  $\theta = \bar{D}$ . D'où  $V(S, \theta)$  est candidate Lyapunov. Vérifions maintenant que  $\dot{V}$  est négative :

$$\dot{V} = (S - \bar{S})(\mu(S) - \theta)(S - S_{in}) + (S - S_{in})(\theta - D^+)(\theta - D^-)(S - \bar{S})\left(\frac{r}{D^+ - \theta} + \frac{r+1}{\theta - D^-}\right) \quad (32)$$

Or, on a :

$$\frac{r}{D^+ - \theta} = \frac{1}{D^+ - D^-} \cdot \frac{\bar{D} - D^+}{D^+ - \theta} \quad (33)$$

et

$$\frac{r+1}{\theta - D^-} = \frac{1}{D^+ - D^-} \cdot \frac{\bar{D} - D^-}{\theta - D^-} \quad (34)$$

D'où on tire que :

$$(\theta - D^+)(\theta - D^-) \left( \frac{r}{D^+ - \theta} + \frac{r+1}{\theta - D^-} \right) = \frac{(\bar{D} - D^+)(D^- - \theta) + (\bar{D} - D^-)(\bar{D} - D^+)}{D^+ - D^-} = \theta - \bar{D} \quad (35)$$

Donc, on a :

$$\dot{V} = (S - S_{in})(S - \bar{S})(\mu(S) - \bar{D}) \quad (36)$$

Puisque  $S - S_{in} < 0$ , une condition nécessaire et suffisante pour que  $\dot{V} < 0$  est que  $\mu(S)$  soit croissante de sorte que le signe de  $(S - \bar{S})(\mu(S) - \bar{D})$  reste positif. ■

### 4.3 Commande robuste non linéaire

Dans cette section, on propose d'étudier une loi de commande permettant de stabiliser d'une manière robuste (i.e. en présence d'incertitudes sur  $\mu(\cdot)$  et  $S_{in}$  telles que  $\mu^-(S) \leq \mu(S) \leq \mu^+(S) \forall S$  et  $S_{in}^- \leq S_{in} \leq S_{in}^+$ ) le système (4).

**Proposition 3 :** La loi de commande :

$$D(X, S) = \begin{cases} \frac{\frac{\mu^-(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S})}{(S_{in}^+ - S)} & \text{si } S \geq \bar{S} \\ \frac{\frac{\mu^+(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S})}{(S_{in}^- - S)} & \text{si } S < \bar{S} \end{cases} \quad (37)$$

garantit une convergence exponentielle de  $S$  vers  $\bar{S}$  en présence d'incertitudes sur  $\mu$  et  $S_{in}$ .

*Remarque :* Cette loi de commande nécessite non seulement la connaissance de  $S$ , mais également celle de  $X$ . Toutefois, cette hypothèse peut être relaxée afin de réaliser la stabilisation du système autour de  $\bar{S}$  à partir de la seule mesure de  $S$  et des bornes sur les incertitudes  $S_{in}$  et  $\mu(\cdot)$  (le lecteur intéressé pourra se reporter à [2]).

**Preuve :** Considérons le cas  $S \geq \bar{S}$ . Introduisons la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = (S - \bar{S})\dot{S} \\ = (S - \bar{S}) \left( -\frac{\mu(S)X}{Y} + D(S_{in} - S) \right) \\ = (S - \bar{S}) \left( -\frac{\mu(S)X}{Y} + \left( \frac{\mu^-(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S}) \right) \left( \frac{S_{in} - S}{S_{in}^+ - S} \right) \right) \\ \leq (S - \bar{S}) \left( -\frac{\mu(S)X}{Y} + \frac{\mu^-(S)X}{Y} - \lambda(S - \bar{S}) \right) \\ \leq -\lambda(S - \bar{S})^2 \end{array} \right. \quad (38)$$

De même, on montre que  $\dot{V} \leq -\lambda(S - \bar{S})^2$  pour  $S < \bar{S}$ . ■

*Remarque :* Cette loi est discontinue en  $S = \bar{S}$  mais peut être régularisée en utilisant une "couche limite" autour de  $\bar{S}$  qui garantit une convergence pratique vers  $\bar{S}$  (Cf. [2]).

## References

- [1] R. Antonelli et A. Astolfi, "Adaptive output feedback stabilization of a Class of uncertain continuous stirred tank reactors," presented at International Federation in Automatic Control, IFAC, Beijing, China, 1999.
- [2] A. Rapaport et J. Harmand, "Robust regulation of a class of partially observed nonlinear continuous bioreactors," *Journal of Process Control*, vol. 12, pp. 291-302, 2002.
- [3] A. Isidori, "Nonlinear control systems," 3rd edition, Springer, 1995.
- [4] M. Vidyasagar, "Nonlinear systems analysis," 2nd edition, Prentice Hall, 1993.