L'effet d'une structuration spatiale et de la diffusion sur la performance d'un chemostat

I. HAIDAR

INRA-INRIA-MERE, UMR MISTEA

24 Novembre 2010

A. RAPAPORT & F. GERARD

Les modèles

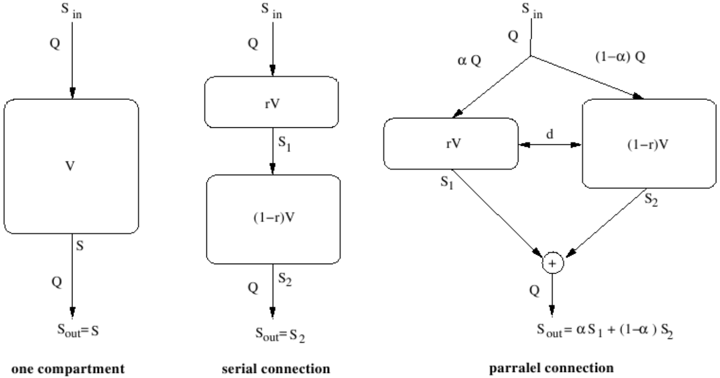


Figure 1: The set of configurations under investigation.

Résultats

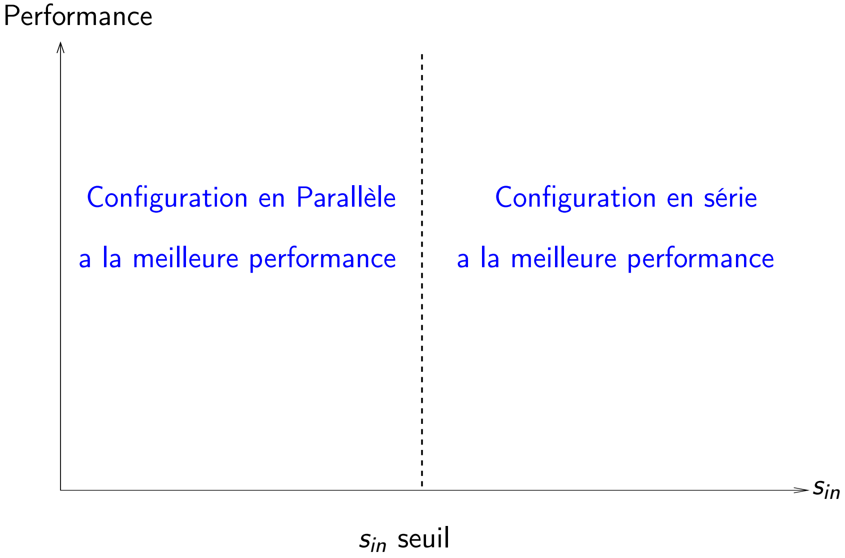


Figure 2: Best performance

Analyse des trois configurations

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_i &= -\frac{\mu(S_i)}{y}X_i + \frac{Q_i}{V_i}(S_{i_-} - S_i) + \frac{d}{V_i}(S_{i_d} - S_i) \\
\dot{X}_i &= \mu(S_i)X_i + \frac{Q_i}{V_i}(X_{i_-} - X_i) + \frac{d}{V_i}(X_{i_d} - X_i)
\end{aligned}
$$

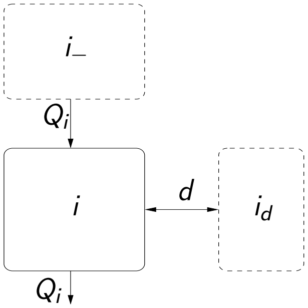


Figure 3: Possible interconnections of a compartment

Hypothèses

- $\mu(S) = mS$
- $y = 1$
- $c_i = m\frac{V}{Q}C_i$
- $r_i = \frac{V_i}{V}$
- $\dfrac{Q}{V} = 1.t^{-1}$

Configuration avec un seul compartiment

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{s} & = & -sx + s_{in} - s \\ \dot{x} & = & sx - x \end{array} \right.$$

L'équilibre non trivial est $(1, s_{in} - 1)$ sous la condition $s_{in} > 1$. Donc on a

$$s_{out}^{\star} = 1.$$

Connection en série de deux compartiments

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{s}_1 & = & -s_1x_1 + \frac{1}{r}(s_{in} - s_1) \\ \dot{x}_1 & = & s_1x_1 - \frac{1}{r}x_1 \\ \dot{s}_2 & = & -s_2x_2 + \frac{1}{1-r}(s_1 - s_2) \\ \dot{x}_2 & = & s_2x_2 + \frac{1}{1-r}(x_1 - x_2) \end{array}\right. \tag{1}$$

avec $r = V_1/V$.

Proposition

Pour $s_{in} > 1/r$, (3) admet dans $\mathbb{R}_+^4$ un unique équilibre globalement exponentiellement stable $(s_1^\star, x_1^\star, s_2^\star, x_2^\star)$. De plus, on a

$$s_{out}^\star < 1 \iff s_{in} > 1 + 1/r.$$

Connection en série de deux compartiments

Preuve (existence et unicité)

- $s_i^\star + x_i^\star = s_{in}$, i=1,2.
- $s_1^\star = \frac{1}{r}$
- $(s_1^\star, x_1^\star, s_2^\star, x_2^\star) = (\frac{1}{r}, s_{in} - \frac{1}{r}, s_2^\star, s_{in} - s_2^\star)$
- $$\varphi(s_2) = s_2(s_{in} - s_2) \text{ et } l(s_2) = \frac{1}{1-r}(\frac{1}{r} - s_2)$$

Connection en série de deux compartiments

Preuve (stabilité)

- $D = \mathbb{R}^4_+$ est invariant par (3).
- $z_i = s_{in} - s_i - x_i, i = 1, 2.$

$$\dot{z} = A_s z \text{ avec } A_s \text{matrice de Hurwitz.}$$

- Toute solution de (3) dans D converge exponentiellement vers

$$K = \{(s_1, x_1, s_2, x_2) \in D; s_1 + x_1 = s_{in} \text{ et } s_2 + x_2 = s_{in}\}$$

$$\dot{s}_2 = -s_2(s_{in} - s_2 - z_2(t)) + \frac{1}{1-r}(s_1(t) - s_2) \tag{2}$$

$$\dot{s}_2 = f(s_2) = (s_{in} - s_2) + \frac{1}{1-r}(\frac{1}{r} - s_2) \tag{3}$$

Connection en série de deux compartiments

- (5) admet un unique équilibre $s_2^\star \in [0, s_{in}]$.
- $f(0) > 0$ et $f(s_{in}) < 0$.
- Toute solution de (5) dans $[0, s_{in}]$ converge asymptotiquement vers $s_2^\star$.
- En appliquant le théorème de Thième.
- La matrice Jacobienne de (4) implique la stabilité exponentielle de l'équilibre non-trivial.

$$J(s_2^\star) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - s_{in} & 0 \\ \frac{1}{1-r} & 2s_2^\star - \frac{1}{1-r} - s_{in} \end{pmatrix}.$$

- $s_{out}^\star < 1 \Leftrightarrow \varphi(1) > l(1) \Leftrightarrow s_{in} > 1 + \frac{1}{r}$

Connection en parallèle de deux compartiments

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\dot{s}_1 & = & -s_1x_1 + \dfrac{\alpha}{r}(s_{in} - s_1) + \dfrac{d}{r}(s_2 - s_1) \\
\dot{x}_1 & = & s_1x_1 - \dfrac{\alpha}{r}x_1 + \dfrac{d}{r}(x_2 - x_1) \\
\dot{s}_2 & = & -s_2x_2 + \dfrac{1-\alpha}{1-r}(s_{in} - s_2) + \dfrac{d}{1-r}(s_1 - s_2) \\
\dot{x}_2 & = & s_2x_2 + \dfrac{1-\alpha}{1-r}(x_1 - x_2) + \dfrac{d}{1-r}(x_1 - x_2)
\end{array}
\right. \tag{4}
$$

où s_{out} est donné par

$$s_{out} = \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2.$$

- $\alpha_1 = \frac{\alpha}{r}$, $\alpha_2 = \frac{1-\alpha}{1-r}$
- $\alpha_1 < \alpha_2$

Connection en parallèle de deux compartiments

Soit les fonctions

$$\begin{aligned} \phi_2(s_1) &= s_1 + \frac{r}{d}(s_{in} - s_1)(s_1 - \alpha_1) \ , \\ \phi_1(s_2) &= s_2 + \frac{1-r}{d}(s_{in} - s_2)(s_2 - \alpha_2) \ , \end{aligned}$$

Proposition

Pour $s_{in} > 1$ *et* $d > 0$, *il existe un unique equilibre* $(s_1^\star, x_1^\star, s_2^\star, x_2^\star)$ *de (6) dans* $\mathbb{R}_+^4$ *qui est globalement exponentiellement stable, où* $(s_1^\star, s_2^\star)$ *est l'unique solution du système*

$$s_2^\star = \phi_2(s_1^\star) \text{ et } s_1^\star = \phi_1(s_2^\star)$$

dans $(0, s_{in}) \times (0, s_{in})$, *avec* $x_i^\star = s_{in} - s_i^\star (i = 1, 2)$.

Connection en parallèle de deux compartiments

Preuve (existence et unicité)

- $s_i^\star + x_i^\star = s_{in} (i = 1, 2)$.
- $$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi_2(s_1) & = & s_2 \\ \phi_1(s_2) & = & s_1 \end{array} \right.$$
- $$g(s_1) = \phi_1(\phi_2(s_1)) - s_1 \ .$$
- $g(s_1^\star) = 0$.
- ϕ_1 et ϕ_2 sont toutes les deux concaves.

Connection en parallèle de deux compartiments

Preuve (stabilité)

- $D = \mathbb{R}_+^4$ est invariant par (6).
- $z_i = s_{in} - s_i - x_i, i = 1, 2.$

$$\dot{z} = A_p z \text{ avec } A_p \text{matrice de Hurwitz.}$$

- Toute solution de (6) dans D converge exponentiellement vers

$$K = \{(s_1, x_1, s_2, x_2) \in D; s_1 + x_1 = s_{in} \text{ et } s_2 + x_2 = s_{in}\}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{s}_1 & = & s_1(z_1(t) + s_1 - s_{in}) + \alpha_1(s_{in} - s_1) + \dfrac{d}{r}(s_2 - s_1) \\ \dot{s}_2 & = & s_2(z_2(t) + s_2 - s_{in}) + \alpha_2(s_{in} - s_2) + \dfrac{d}{1-r}(s_1 - s_2) \end{array}\right. \tag{5}$$

Connection en parallèle de deux compartiments

$\Delta = [0, s_{in}] \times [0, s_{in}]$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{s}_1 & = & (s_{in} - s_1)(\alpha_1 - s_1) + \dfrac{d}{r}(s_2 - s_1) \\ \dot{s}_2 & = & (s_{in} - s_2)(\alpha_2 - s_2) + \dfrac{d}{1-r}(s_1 - s_2) \end{array} \right. \tag{6}$$

- (8), admet deux équilibre, $E_1 = (s_1^\star, s_{in} - s_1^\star, s_2^\star, s_{in} - s_2^\star)$ et $E_0 = (s_{in}, 0, s_{in}, 0)$

$$J(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{r}\phi_2'(s_1) & \frac{d}{r} \\ \frac{d}{1-r} & -\frac{d}{1-r}\phi_1'(s_2) \end{pmatrix}.$$

- E_1 est localement stable, E_0 est un col.

Connection en parallèle de deux compartiments

- à l'intérieur de Δ il n'y a pas des orbites périodiques pour (8)
- Les trajectoires de (7) converge vers E_1 ou bien elles sont absorbées par $\partial\Delta$
- $\partial\Delta - (s_{in}, 0, s_{in}, 0)$ est répulsive pour le système globale (6)
- $(s_{in}, 0, s_{in}, 0)$ est répulsif pour le système globale (6)

$$V(x_1, x_2) = \min(rx_1 + (1-r)x_2, x_1)$$

Connection en parallèle de deux compartiments

Proposition

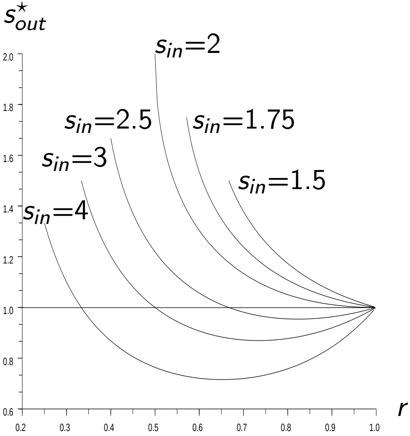
Supposant que $\alpha_1 < \alpha_2$.

- *Pour* $s_{in} \geq 2$, *la fonction* $d \mapsto s^\star_{out}$ *(pour l'équilibre non-trivial) est décroissante et* $s^\star_{out} > 1$ *pour tout* $d \geq 0$.
- *Pour* $s_{in} < 2$, *la fonction* $d \mapsto s^\star_{out}$ *(pour l'équilibre non-trivial) admet un minimum en* $d^\star < +\infty$ *qui est strictement plus petit que un. De plus, on a*

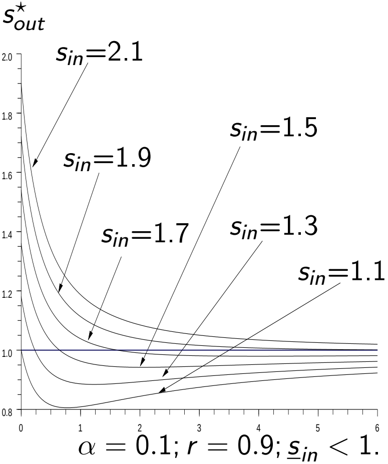
$$s_{in} > \underline{s}_{in} = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \Rightarrow d^\star > 0$$

avec $\underline{s}_{in} < \min(2, \alpha_2)$.

Simulations numériques

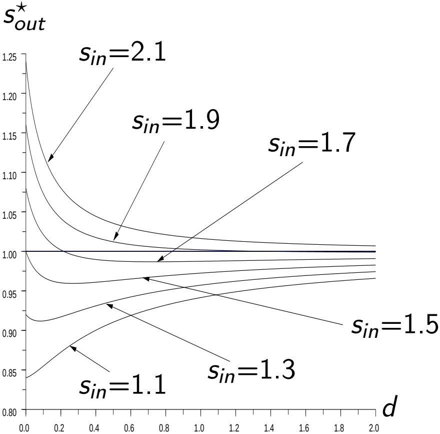


serial connection



parallel connection

Simulations numériques



$\alpha = 0.6$; $r = 0.9$; $\underline{s}_{in} > 1$.

parallel connection

MERCI