

Université Tunis El Manar
ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS
Université Montpellier 2
UMR MISTEA - INRIA - FRANCE



TREASURE'2010

La floculation et la coexistence dans un chémostat

R. Fekih Salem, T. Sari & A.Rapaport

Tunis, 24 Novembre 2010

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide
- 5 Modèle général
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques
- 7 Conclusion et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide
- 5 Modèle général
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Introduction

- La coexistence est le résultat de la floculation de l'espèce la plus compétitive : B. Haegeman and A. Rapaport *

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - \frac{\mu_1(S)}{y_1} V_1 - \frac{\mu_2(S)}{y_2} X_2 \\ \dot{V}_1 = \mu_1(S)V_1 - aV_1^2 + bW_1 - DV_1 \\ \dot{W}_1 = aV_1^2 - bW_1 - DW_1 \\ \dot{X}_2 = \mu_2(S)X_2 - DX_2, \end{cases} \quad (1)$$

- V_1 et W_1 : Densités des bactéries isolées et des floccs de la première espèce.
- X_2 : Densité de la deuxième espèce.

* Floculation can explain coexistence in the chemostat, *J. Biological Dynamics* (2008).

- 1 Introduction
- 2 Le modèle**
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide
- 5 Modèle général
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Le modèle

- Les flocs consomment du substrat, le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - \mu_{11}(S)V_1 - \mu_{12}(S)W_1 - \mu_2(S)X_2 \\ \dot{V}_1 = \mu_{11}(S)V_1 - aV_1^2 + bW_1 - DV_1 \\ \dot{W}_1 = \mu_{12}(S)W_1 + aV_1^2 - bW_1 - DW_1 \\ \dot{X}_2 = \mu_2(S)X_2 - DX_2. \end{cases} \quad (2)$$

H1 : $\mu_{11}(\cdot)$, $\mu_{12}(\cdot)$ et $\mu_2(\cdot)$: continues lipschitziennes, strictement croissantes / $\mu_{11}(0) = \mu_{12}(0) = \mu_2(0) = 0$.

H2 : Les bactéries en flocs ont moins accès au substrat que les bactéries isolées

$$\mu_{11}(S) > \mu_{12}(S), \quad \forall S > 0 \implies \lambda_{11} < \lambda_{12}$$

H3 : $\lambda_{11} < \lambda_2 < \lambda_{12}$.

avec $\lambda_{1i} = \mu_{1i}^{-1}(D)$, pour $i = 1, 2$ et $\lambda_2 = \mu_2^{-1}(D)$.

Soit $z = S + V_1 + W_1 + X_2$ et $Y = (S, V_1, X_2)'$.

$$(2) \iff \text{Système en cascade} \begin{cases} \dot{z} = D(S_{in} - z) \\ \dot{Y} = \phi(z, Y), \end{cases} \quad (3)$$

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} D(S_{in} - S) - \mu_{11}(S)V_1 - \mu_{12}(S)(z - S - V_1 - X_2) - \mu_2 X_2 \\ (\mu_{11}(S) - aV_1 - D)V_1 + b(z - S - V_1 - X_2) \\ (\mu_2(S) - D)X_2 \end{pmatrix}$$

Proposition 1

- 1 Pour des valeurs initiales positives, les solutions de (2) restent **positives** au cours du temps et sont **bornées** quand $t \rightarrow +\infty$.
- 2 $K(z(0)) = \left\{ (S, V_1, W_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^4 / z \leq \max(S_{in}, z(0)) \right\}$ est **attracteur positif invariant**

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif**
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide
- 5 Modèle général
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Existence de l'équilibre positif

H4 : Lorsqu'elle est seule l'espèce X_2 survit, c'est à dire

$$\mu_2(S_{in}) > D.$$

Proposition 2

L'équilibre de coexistence du système (2) *existe* \iff **H1** et **H3** sont vérifiées ainsi que la condition

$$S_{in} > S_{crit}$$

$$S_{crit} = \lambda_2 + \frac{(\mu_{11}(\lambda_2) - D)(\mu_{12}(\lambda_2) - D - b)}{a(\mu_{12}(\lambda_2) - D)^2} (\mu_{12}(\lambda_2) - \mu_{11}(\lambda_2)).$$

Point d'équilibre positif

$$E^* = \begin{pmatrix} S^* \\ V_1^* \\ W_1^* \\ X_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \frac{\mu_{11}(\lambda_2) - D}{a(\mu_{12}(\lambda_2) - D)} (\mu_{12}(\lambda_2) - D - b) \\ -\frac{(\mu_{11}(\lambda_2) - D)^2}{a(\mu_{12}(\lambda_2) - D)^2} (\mu_{12}(\lambda_2) - D - b) \\ S_{in} - S_{crit} \end{pmatrix}$$

E^* est Localement Exponentiellement Stable (LES)

Proposition 3

Dès que l'équilibre E^* existe, il est **LES** \iff La condition $S_{in} > S_{crit}$ est vérifiée.

Preuve. On a $z^* = S^* + V_1^* + W_1^* + X_2^* = S_{in}$.

Système (2) \iff Système en cascade (3),

\implies Il suffit de montrer que $Y^* = (S^*, V_1^*, X_2^*)'$ est un équilibre LES du système réduit $\dot{Y} = \phi(z, Y)$.

La matrice Jacobienne de ϕ en (S_{in}, Y^*) est

$$J_{(S_{in}, Y^*)} = \begin{pmatrix} -m_{11} & -m_{12} & -m_{13} \\ \beta & -\alpha & -b \\ m_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve

- Le polynôme caractéristique est donnée par

$$P_J(\lambda) = |J - \lambda * I| = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

avec I la matrice identité d'ordre 3 et

$$a_0 = -1, \quad a_1 = -(m_{11} + \alpha), \quad a_2 = -(\alpha m_{11} + \beta m_{12} + m_{13} m_{31}),$$

$$a_3 = m_{31}(b m_{12} - \alpha m_{13}).$$

- D'après le critère de Routh-Hurwitz, \bar{E} est LES \iff

$$\begin{cases} a_i < 0, & i = 0 \dots 3 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \end{cases}$$

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide**
- 5 Modèle général
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Système lent/rapide

- On suppose que la floculation et la défloculation sont plus rapides que la croissance des bactéries,

$$a = \frac{A}{\varepsilon}, \quad b = \frac{B}{\varepsilon},$$

où A et B sont des nouveaux paramètres du modèle. D'où le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{S} &= D(S_{in} - S) - \mu_{11}(S)V_1 - \mu_{12}(S)W_1 - \mu_2(S)X_2 \\ \varepsilon \dot{V}_1 &= \varepsilon \mu_{11}(S)V_1 - AV_1^2 + BW_1 - \varepsilon DV_1 \\ \varepsilon \dot{W}_1 &= \varepsilon \mu_{12}(S)W_1 + AV_1^2 - BW_1 - \varepsilon DW_1 \\ \dot{X}_2 &= \mu_2(S)X_2 - DX_2. \end{cases} \quad (4)$$

- Les points d'équilibre du système (4) sont déduits des points d'équilibre du système (2)

Point d'équilibre positif

$$\checkmark \quad E^*(\varepsilon) = \left(S^*(\varepsilon), V_1^*(\varepsilon), W_1^*(\varepsilon), X_2^*(\varepsilon) \right)' = \bar{E} + \varepsilon E' =$$

$$\left(\begin{array}{c} \lambda_2 \\ \frac{\mu_{11}(\lambda_2) - D}{A(D - \mu_{12}(\lambda_2))} B \\ \frac{(\mu_{11}(\lambda_2) - D)^2}{A(\mu_{12}(\lambda_2) - D)^2} B \\ S_{in} - S_c \end{array} \right) + \varepsilon \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\mu_{11}(\lambda_2) - D}{A} \\ \frac{(D - \mu_{11}(\lambda_2))^2}{A(D - \mu_{12}(\lambda_2))} \\ \frac{(\mu_{11}(\lambda_2) - D)(\mu_{11}(\lambda_2) - \mu_{12}(\lambda_2))}{A(D - \mu_{12}(\lambda_2))} \end{array} \right)$$

$$S_c = \lambda_2 + B(\mu_{11}(\lambda_2) - D)(\mu_{11}(\lambda_2) - \mu_{12}(\lambda_2)) / A(\mu_{12}(\lambda_2) - D)^2$$

Proposition 4

Si la condition $S_{in} > S_c$ est vérifiée, alors pour tout ε assez petit, E^* est **LES** pour le système (4).

Soit $X_1 = V_1 + W_1$: la densité totale de la première espèce. Le système (4) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - \mu_{11}(S)V_1 - \mu_{12}(S)(X_1 - V_1) - \mu_2(S)X_2 \\ \dot{X}_1 = \mu_{11}(S)V_1 + \mu_{12}(S)(X_1 - V_1) - DX_1 \\ \dot{X}_2 = \mu_2(S)X_2 - DX_2 \\ \varepsilon \dot{V}_1 = (BX_1 - AV_1^2 - BV_1) + \varepsilon(\mu_{11}(S) - D)V_1. \end{cases} \quad (5)$$

Soient $z = S + X_1 + X_2$ et la variété

$$M = \left\{ (S, X_1, V_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^4 / \varphi(X_1, V_1) = AV_1^2 + BV_1 - BX_1 = 0 \right\}.$$

Proposition 5

- ❶ Pour toute condition initiale strictement positive, il existe k_1, k_2 indépendants de ε tel que

$$\left(\varphi(X_1, V_1)\right)^2 \leq 2k_1\varepsilon, \quad \forall t \geq \frac{\varepsilon}{2B} \ln\left(k_2 \frac{B}{\varepsilon}\right).$$

- ❷ Toutes les trajectoires entrent et restent dans un petit voisinage de M au bout d'un certain temps.

Preuve. $V(X_1, V_1) = \frac{1}{2} \left(AV_1^2 + BV_1 - BX_1 \right)^2 \implies$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial X_1} \dot{X}_1 + \frac{\partial V}{\partial V_1} \dot{V}_1 = (AV_1^2 + BV_1 - BX_1)[2AV_1^2(\mu_{11}(\lambda_2) - D) + B(X_1 - V_1)(D - \mu_{12}(\lambda_2))] - \frac{2AV_1 + B}{\varepsilon} (AV_1^2 + BV_1 - BX_1)^2.$$

$$\dot{V} = \gamma(S, X_1, X_2, V_1) - \frac{2AV_1 + B}{\varepsilon} 2V$$

Pour toute condition initiale strictement positive, les trajectoires restent dans le compact $K(z_0)$ indépendantes de ε

$\implies \gamma$ est bornée.

$$\checkmark \quad m = \max_{K(z_0)} \gamma(S, X_1, X_2, V_1) \implies \dot{V}(t) \leq \frac{-2B}{\varepsilon} V(t) + m$$

$$\checkmark \quad W(t) = V(t) - \frac{m\varepsilon}{2B} \implies \dot{W}(t) \leq \frac{-2B}{\varepsilon} W(t)$$

$$\implies V(t) \leq \frac{m\varepsilon}{2B} + \left(V(0) - \frac{m\varepsilon}{2B} \right) e^{\frac{-2B}{\varepsilon} t} \leq \frac{m\varepsilon}{2B} + V(0) e^{\frac{-2B}{\varepsilon} t}.$$

$$\checkmark \quad k_1 = \frac{m}{B}, k_2 = \frac{2V(0)}{m} \text{ et } t > \frac{\varepsilon}{2B} \ln\left(k_2 \frac{B}{\varepsilon}\right)$$

$$\implies V(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} k_1 + \frac{mk_2}{2} e^{-\frac{2B}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2B} \ln\left(\frac{k_2 B}{\varepsilon}\right)} = \frac{\varepsilon}{2} k_1 + \frac{mk_2}{2} \frac{\varepsilon}{k_2 B} = \varepsilon K_1$$

La dynamique réduite de la variété M

$$M = \left\{ (S, X_1, V_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^4 / \varphi(X_1, V_1) = AV_1^2 + BV_1 - BX_1 = 0 \right\}$$

V_1 et W_1 peut être déterminé à partir de la valeur de X_1 ,

$$V_1 = \rho(X_1) = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4ABX_1}}{2A}, \quad W_1 = X_1 - \rho(X_1).$$

$$\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - \mu_{11}(S)\rho(X_1) - \mu_{12}(S)(X_1 - \rho(X_1)) - \mu_2 X_2 \\ \dot{X}_1 = \mu_{11}(S)\rho(X_1) + \mu_{12}(S)(X_1 - \rho(X_1)) - DX_1 \\ \dot{X}_2 = \mu_2(S)X_2 - DX_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\Rightarrow g(X_1) = \frac{\rho(X_1)}{X_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\frac{A}{B}X_1}}$$

$$\mu_1(S, X_1) = \mu_{11}(S)g(X_1) + \mu_{12}(S)(1 - g(X_1))$$

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide
- 5 Modèle général**
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques
- 7 Conclusion et perspectives

Hypothèses

$$\begin{cases} \dot{S} &= D(S_{in} - S) - \mu_1(S, X_1)X_1 - \mu_2(S)X_2 \\ \dot{X}_1 &= \left(\mu_1(S, X_1) - D \right) X_1 \\ \dot{X}_2 &= \left(\mu_2(S) - D \right) X_2. \end{cases}$$

H5 : $\mu_1(S, X_1) \geq 0$, $\frac{\partial \mu_1}{\partial S} > 0$ et $\frac{\partial \mu_1}{\partial X_1} < 0$, $\forall (S, X_1) \in \mathbb{R}_+^2$

H6 : $\mu_1(0, X_1) = 0$, $\forall X_1 \geq 0$: En absence du substrat le taux de croissance est nul.

H7 : $\mu_1(S_{in}, 0) \geq D$ et $\mu_2(S_{in}) \geq D$: Chacune des espèces n'est pas lessivée en l'absence de l'autre espèce. On note

$$\lambda_1 = [\mu_1(\cdot, 0)]^{-1}(D), \quad \lambda_2 = \mu_2^{-1}(D)$$

Système autonome asymptotique

$$z = S + X_1 + X_2, \quad \dot{z} = D(S_{in} - z) \implies z = S_{in} + (z(0) - S_{in})e^{-Dt}.$$

On définit l'ensemble compact par

$$S(z_0) = \left\{ (S, X_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^3 / S + X_1 + X_2 \leq \max(S_{in}, z_0) \right\}$$

Les trajectoires restent dans le compact $S(z_0)$ pour tout t ,

\iff Toutes les trajectoires sont bornées.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= \left[\mu_1 \left(S_{in} + (z(0) - S_{in})e^{-Dt} - X_1 - X_2, X_1 \right) - D \right] X_1 \\ \dot{X}_2 &= \left[\mu_2 \left(S_{in} + (z(0) - S_{in})e^{-Dt} - X_1 - X_2 \right) - D \right] X_2. \end{cases} \quad (7)$$

On se place sur l'ensemble invariant $S + X_1 + X_2 = S_{in}$,

$$S.L \begin{cases} \dot{X}_1 &= \left[\mu_1(S_{in} - X_1 - X_2, X_1) - D \right] X_1 \\ \dot{X}_2 &= \left[\mu_2(S_{in} - X_1 - X_2) - D \right] X_2. \end{cases} \quad (8)$$

Isoclines

L'isocline nulle $\{\dot{X}_2 = 0, X_2 \neq 0\}$ est donnée par l'équation

$$X_2 = (S_{in} - \lambda_2) - X_1.$$

Soit $f(X_1, X_2) = \mu_1(S_{in} - X_1 - X_2, X_1) - D$.

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} < 0 \text{ T.F.I} \implies X_2 = g(X_1), \quad g'(X_1) < -1.$$

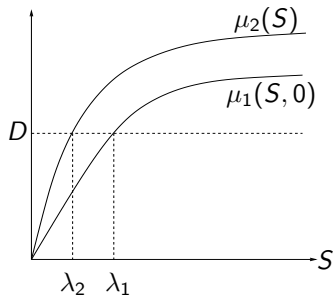
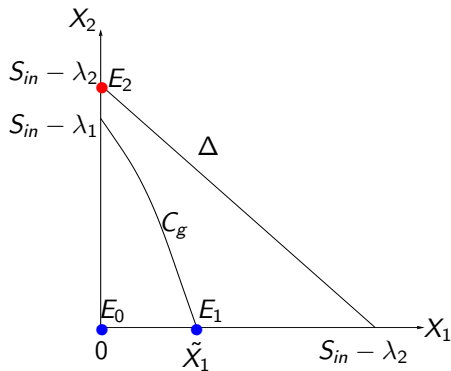
$$X_1 = 0 \implies \mu_1(S_{in} - \tilde{X}_2, 0) = D \iff S_{in} - \tilde{X}_2 = \lambda_1 \iff \tilde{X}_2 = S_{in} - \lambda_1.$$

$$X_2 = 0 \implies \psi_1(X_1) = f(X_1, 0) = \mu_1(S_{in} - X_1, X_1) - D$$

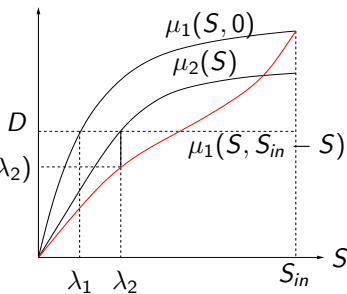
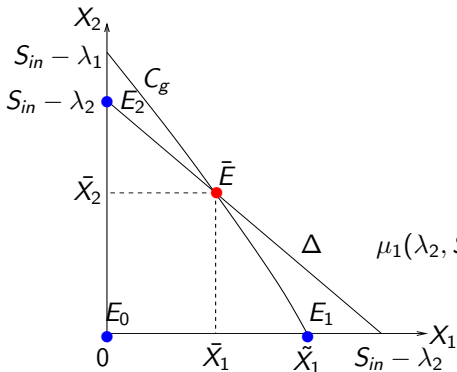
$$\psi_1(0) = \mu_1(S_{in}, 0) - D > 0, \quad \psi_1(S_{in}) = -D < 0, \quad \psi_1'(X_1) < 0,$$

$$\implies \exists ! \tilde{X}_1 \in]0, S_{in}[\text{ tel que } \psi_1(\tilde{X}_1) = 0.$$

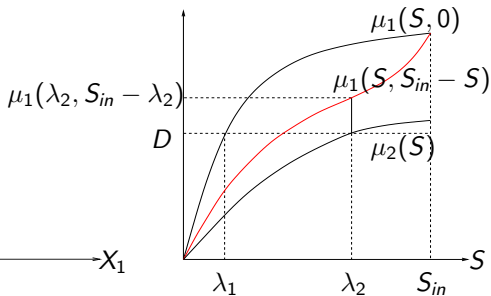
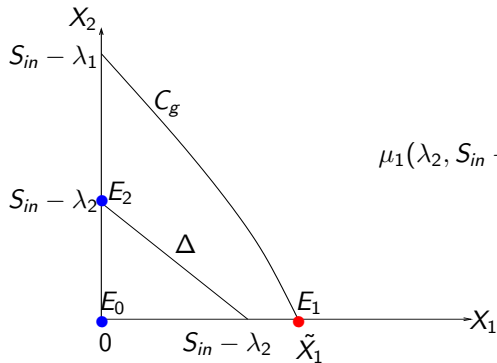
Premier cas : $\lambda_2 < \lambda_1$



Deuxième cas : $\lambda_1 < \lambda_2$ et $\mu_1(\lambda_2, S_{in} - \lambda_2) < D$



Troisième cas : $\lambda_1 < \lambda_2$ et $\mu_1(\lambda_2, S_{in} - \lambda_2) > D$



Proposition 6

\bar{E} est un équilibre *globalement exponentiellement stable* sur le quadrant ouvert positif $\iff \lambda_1 < \lambda_2$ et $\mu_1(\lambda_2, S_{in} - \lambda_2) < D$.

Preuve. $z = S + X_1 + X_2 \leq \max(S_{in}, z(0))$, $\forall (S, X_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^3$,
 $\implies \exists M > 0 / X_1 + X_2 \leq M$, $\forall (X_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^2$,

Pour toute condition initiale strictement positive, les solutions du système (8) sont positivement *bornées*



Les *ensembles limites* sont compacts non vides.



Théorème Poincaré-Bendixson \implies Soit des *points d'équilibre* soit des *orbites périodiques* soit des *polycycles*.

Proposition 6

\bar{E} est un équilibre *globalement exponentiellement stable* sur le quadrant ouvert positif $\iff \lambda_1 < \lambda_2$ et $\mu_1(\lambda_2, S_{in} - \lambda_2) < D$.

Preuve. $z = S + X_1 + X_2 \leq \max(S_{in}, z(0))$, $\forall (S, X_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^3$,
 $\implies \exists M > 0 / X_1 + X_2 \leq M$, $\forall (X_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^2$,

Pour toute condition initiale strictement positive, les solutions du système (8) sont positivement **bornées**



Les **ensembles limites** sont compacts non vides.



Théorème Poincaré-Bendixson \implies Soit des **points d'équilibre** soit des **orbites périodiques** soit des **polycycles**.

Soit

$$C.V \begin{cases} \xi_1 = \ln(X_1) \\ \xi_2 = \ln(X_2). \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \dot{X}_1/X_1 \\ \dot{\xi}_2 = \dot{X}_2/X_2. \end{cases}$$

$$(8) \implies \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \mu_1(S_{in} - e^{\xi_1} - e^{\xi_2}, e^{\xi_1}) - D \\ \dot{\xi}_2 = \mu_2(S_{in} - e^{\xi_1} - e^{\xi_2}) - D. \end{cases} \quad (9)$$

$$G(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} g_1(e^{\xi_1}, e^{\xi_2}) \\ g_2(e^{\xi_1}, e^{\xi_2}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{div} G = \left(-\frac{\partial \mu_1}{\partial S} + \frac{\partial \mu_1}{\partial X_1} \right) e^{\xi_1} - \mu_2'(S_{in} - e^{\xi_1} - e^{\xi_2}) < 0$$

Critère du Dulac \implies On ne peut pas avoir dans l'ensemble limite une orbite périodique ou un polycycle.

Théorème de Butler-McGehee \implies Toutes les solutions convergent globalement vers le point d'équilibre \bar{E} .

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide
- 5 Modèle général
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques**
- 7 Conclusion et perspectives

Exclusion de l'espèce la moins compétitive

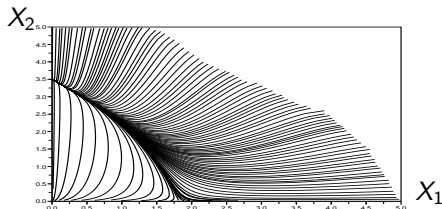
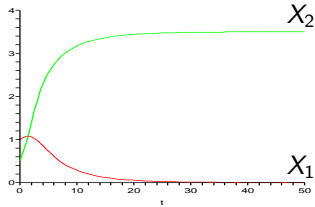
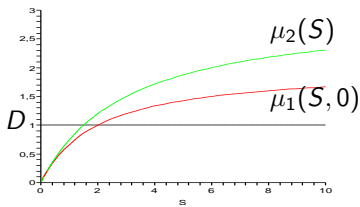


FIG.: Convergence de toutes les solutions vers le point d'équilibre E_2 .

Coexistence des deux espèces

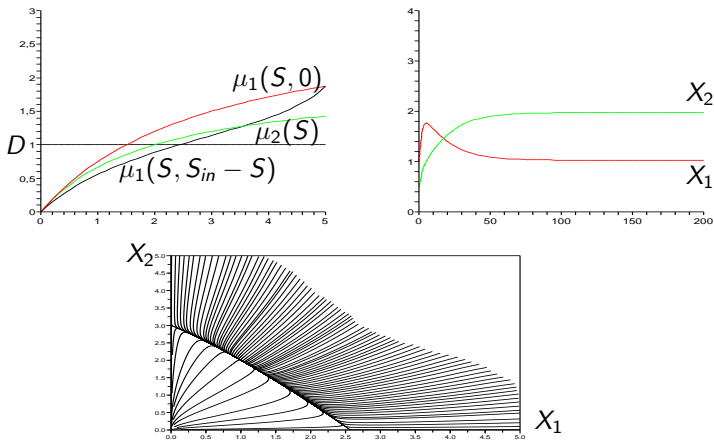


FIG.: Convergence de toutes les solutions vers le point d'équilibre \bar{E} .

Exclusion de la deuxième espèce

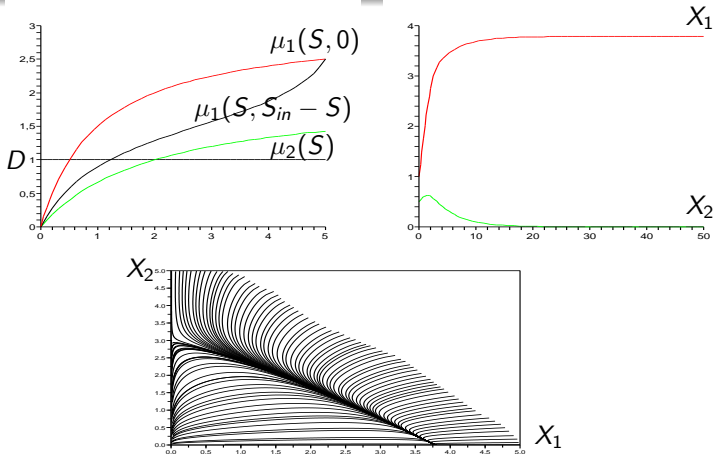


FIG.: Convergence de toutes les solutions vers le point d'équilibre E_1 .

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
- 3 Existence et Stabilité de l'équilibre positif
 - Existence de l'équilibre positif
 - Stabilité de l'équilibre positif
- 4 Système lent/rapide
- 5 Modèle général
 - Isoclines
 - Propriétés globales
- 6 Simulations numériques
- 7 Conclusion et perspectives

- En supposant que l'espèce la plus compétitive inhibe sa croissance par la formation des floccs, on a pu démontrer que l'équilibre de coexistence est LAS.
- On a supposé la floculation est plus rapide que la croissance des espèces et on a réussi à prouver que l'espèce la plus compétitive peut coexister avec la deuxième espèce.
- Selon les fonctions de croissance des espèces et le taux de dilution, les trajectoires du système convergent globalement soit vers E_1 , soit E_2 ou \bar{E} .
- Floculation des deux espèces avec des taux de dilution différents.
- Extension aux modèles avec n espèce.

Merci pour votre attention

Université Tunis El Manar
ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS
Université Montpellier 2
UMR MISTEA - INRIA - FRANCE



TREASURE'2010

La floculation et la coexistence dans un chémostat

R. Fekih Salem, T. Sari & A.Rapaport

Tunis, 24 Novembre 2010